MATHEMATIQUES - 2nde — Année Scolaire 2023-2024

Evaluation comune n°1 - *(Correction)* — Lundi 29 janvier 2024

Exercice 1

1. A partir de l'inégalité $-1 \leqslant y < 7$, on peut écrire que $J = [-1;7[$.

2. L'inéquation $\left|x + \frac{1}{7}\right| > 7$ peut s'écrire $\left|x - \frac{-1}{7}\right| > 7$. Le centre c de l'intervalle devient donc $c = \frac{-1}{7}$ et le rayon est $r = 7$. Par conséquent, l'intervalle I peut s'écrire :

$$I = \left]-\infty; c - r\right[\cup \left]c + r; +\infty\right[$$

$$I = \left]-\infty; \frac{-1}{7} - 7\right[\cup \left]\frac{-1}{7} + 7; +\infty\right[$$

$$I = \left]-\infty; \frac{-1}{7} - \frac{49}{7}\right[\cup \left]\frac{-1}{7} + \frac{49}{7}; +\infty\right[$$

$$I = \left]-\infty; \frac{-50}{7}\right[\cup \left]\frac{48}{7}; +\infty\right[$$

3. Déterminer $I \cap J$ revient à chercher les éléments qui appartiennent à la fois à I et à J. Comme $I = \left]-\infty; \frac{-50}{7}\right[\cup \left]\frac{48}{7}; +\infty\right[$ et $J = [-1;7[$, alors on en déduit que $I \cap J = \left]\frac{48}{7}; 7\right[$.

Exercice 2

1. La fonction complétée pour qu'elle renvoie le nombre de semaines pour que la plage soit fermée donne :

```python
def sangasse():
    masse=700
    n=0
    while masse<=1000 :
        masse= masse+4*masse/100
        n=n+1
    return n
```

2. Le nombre de semaines qu'il faut attendre pour que la plage soit fermée peut être déterminé à l'aide de la calculatrice en écrivant le programme dans le module Python. Le résultat donne $n = 10$ semaines.

Exercice 3

Les réponses liées au Q.C.M. 1 sont : 1B - 2A - 3D - 4D - 5A

Exercice 4

Les réponses liées au Q.C.M. 2 sont : 6B - 7AD - 8ABD - 9D - 10ABC

Exercice 5

1. La droite (BC) est tangente à ce cercle en B. Elle est donc perpendiculaire au rayon $[AB]$ en B. Par conséquent, le triangle ABC est rectangle en B et on peut donc utiliser le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned}
AC^2 &= AB^2 + BC^2 \\
(R+DC)^2 &= R^2 + BC^2 \\
R^2 + 2R \times DC + DC^2 &= R^2 + BC^2 \\
R^2 - R^2 + 2R \times DC &= BC^2 - DC^2 \\
R &= \frac{BC^2 - DC^2}{2DC} \\
R &= \frac{21^2 - 9^2}{2 \times 9} \\
R &= 20
\end{aligned}$$

La longueur du rayon du cercle est de 20 cm.

Exercice 6

1. Le développement de $f(x)$ donne :

$$\begin{aligned}
f(x) &= (x-5)(5x-3) - (x-5)(2x+3) \\
f(x) &= 5x^2 - 3x - 25x + 15 - \left(2x^2 + 3x - 10x - 15\right) \\
f(x) &= 5x^2 - 28x + 15 - 2x^2 - 3x + 10x + 15 \\
f(x) &= 3x^2 - 21x + 30
\end{aligned}$$

La forme développée et réduite de $f(x)$ est $f(x) = 3x^2 - 21x + 30$.

2. La factorisation de $f(x)$ donne :

$$\begin{aligned}
f(x) &= (x-5)(5x-3)-(x-5)(2x+3) \\
f(x) &= (x-5)[(5x-3)-(2x+3)] \\
f(x) &= (x-5)(5x-3-2x-3) \\
f(x) &= (x-5)(3x-6) \\
f(x) &= 3(x-5)(x-2)
\end{aligned}$$

La forme factorisée de $f(x)$ est $f(x) = 3(x-5)(x-2)$.

3. Le développement de $g(x)$ donne :

$$\begin{aligned}
g(x) &= (2x-3)^2-(x+2)^2 \\
g(x) &= (2x)^2-2\times 2x\times 3+3^2-\left(x^2+2\times x\times 2+2^2\right) \\
g(x) &= 4x^2-12x+9-x^2-4x-4 \\
g(x) &= 3x^2-16x+5
\end{aligned}$$

La forme développée et réduite de $g(x)$ est $g(x) = 3x^2-16x+5$.

4. La factorisation de $g(x)$ donne :

$$\begin{aligned}
g(x) &= (2x-3)^2-(x+2)^2 \\
g(x) &= [(2x-3)+(x+2)][(2x-3)-(x+2)] \\
g(x) &= (3x-1)(x-5)
\end{aligned}$$

La forme factorisée de $g(x)$ est $g(x) = (3x-1)(x-5)$.

5. Les calculs de $f(2)$ et $f(0)$ avec les formes judicieusement choisies sont :

$$\begin{aligned}
f(x) &= 3x^2-21x+30 \\
f(0) &= 3\times 0^2-21\times 0+30 \\
f(0) &= 30
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(x) &= (x-5)(3x-6) \\
f(2) &= (2-5)(3\times 2-6) \\
f(2) &= -3\times 0 \\
f(2) &= 0
\end{aligned}$$

On obtient les résultats $f(2) = 0$ et $f(0) = 30$.

6. Le calcul de $g\left(2\sqrt{3}\right)$ avec la forme judicieusement choisie est :

$$\begin{aligned}
g(x) &= 3x^2 - 16x + 5 \\
g\left(2\sqrt{3}\right) &= 3\left(2\sqrt{3}\right)^2 - 16 \times 2\sqrt{3} + 5 \\
g\left(2\sqrt{3}\right) &= 3 \times 2^2 \times \left(\sqrt{3}\right)^2 - 32\sqrt{3} + 5 \\
g\left(2\sqrt{3}\right) &= 12 \times 3 - 32\sqrt{3} + 5 \\
g\left(2\sqrt{3}\right) &= 41 - 32\sqrt{3}
\end{aligned}$$

On obtient le résultat $g\left(2\sqrt{3}\right) = 41 - 32\sqrt{3}$.

7. La résolution de l'équation $g(x) = 0$ avec la forme la plus judicieusement choisie revient à résoudre l'équation $(3x-1)(x-5) = 0$. Cette équation est du type produit nul. Un produit de facteurs est nul si au moins l'un d'eux est nul. On résout alors :

$$\begin{aligned}
\text{d'une part } 3x - 1 &= 0 \\
3x &= 1 \\
x &= \frac{1}{3}
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
\text{et d'autre part } x - 5 &= 0 \\
x &= 5
\end{aligned}$$

Les solutions de l'équation sont $x = \dfrac{1}{3}$ et $x = 5$.

Exercice 7

1. D'après le graphique, l'ensemble de définition est bien $D_f = [-9;0[\cup]0;9]$ et centré en 0. De plus, les points de la courbe semblent symétriques par rapport à l'origine du repère. On peut conjecturer que la fonction f est impaire sur D_f.

2. D_f est bien centré en 0. Ensuite, on compare les expressions de $f(x)$ et celle de $-f(-x)$:

$$f(x) = \frac{2}{x} - \frac{x}{2}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
-f(-x) &= -\left(\frac{2}{-x} - \frac{-x}{2}\right) \\
-f(-x) &= \frac{-2}{-x} - \frac{x}{2} \\
-f(-x) &= \frac{2}{x} - \frac{x}{2}
\end{aligned}$$

On obtient bien l'égalité $f(x) = -f(-x)$ donc f est impaire sur D_f.

Exercice 8

1. L'ensemble de définition D_f de f est défini tel que $x+2 \neq 0$, ce qui revient à exclure $x=-2$. Par conséquent, $D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$.

2. On part de l'expression de f :

$$f(x) = \frac{4}{x+2} - 1$$
$$f(x) = \frac{4}{x+2} - \frac{x+2}{x+2}$$
$$f(x) = \frac{4-(x+2)}{x+2}$$
$$f(x) = \frac{2-x}{x+2}$$

On obtient bien l'expression $f(x) = \dfrac{2-x}{x+2}$.

3. Les calculs de $f(1)$ et $f\left(\dfrac{3}{2}\right)$ donnent :

$$f(x) = \frac{2-x}{x+2}$$
$$f(1) = \frac{2-1}{1+2}$$
$$f(1) = \frac{1}{3}$$

$$f(x) = \frac{2-x}{x+2}$$
$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{2-\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}+2}$$
$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\frac{4}{2}-\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}+\frac{4}{2}}$$
$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{7}{2}}$$
$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{7}$$
$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{7}$$

Les résultats sont $f(1) = \dfrac{1}{3}$ et $f\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{1}{7}$.

4. Déterminer le ou les antécédents de 3 par f revient à résoudre l'équation $f(x) = 3$:

$$\begin{aligned} f(x) &= 3 \\ \frac{2-x}{x+2} &= 3 \\ \frac{2-x}{x+2} - 3 &= 0 \\ \frac{2-x}{x+2} - \frac{3(x+2)}{x+2} &= 0 \\ \frac{2-x-3x-6}{x+2} &= 0 \\ \frac{-4-4x}{x+2} &= 0 \end{aligned}$$

Un quotient est nul si son dividende est nul et si son diviseur est non nul. Le diviseur non nul est confirmé par l'exclusion de -2 de l'ensemble de définition. On résout alors :

$$\begin{aligned} -4-4x &= 0 \\ 4x &= -4 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

L'antécédent de 3 par f est -1.

5. Le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses a pour ordonnée $y = 0$. On cherche alors l'antécédent de 0 par f. Ce qui revient à résoudre l'équation $f(x) = 0$:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ \frac{2-x}{x+2} &= 0 \end{aligned}$$

De la même façon que pour la résolution de l'équation en question précédente, l'équation $f(x) = 0$ revient à résoudre l'équation $2 - x = 0$, ce qui donne $x = 2$. Les coordonnées du point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses sont $(2;0)$.

6. Le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées a pour abscisse $x = 0$. On cherche alors l'image de 0 par f. Ce qui revient à calculer $f(0)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2-x}{x+2} \\ f(0) &= \frac{2-0}{0+2} \\ f(0) &= 1 \end{aligned}$$

Les coordonnées du point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées sont $(0;1)$.