MATHEMATIQUES - 2nde Année Scolaire 2023-2024

Evaluation n°8 - *(Correction)* Jeudi 4 avril 2024

Exercice 1

1. L'abscisse du point G est $x_G = 0$ puisque le point d'intersection de la droite (AG) avec l'axe des ordonnées est le point G et tout point de cet axe a pour abscisse 0.

2. Pour répondre à l'objectif de l'exercice, on étudie l'alignement des trois points. Pour cela, on étudie la colinéarité des deux vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AB}$ en calculant leur déterminant. Avant cela, on calcule leurs coordonnées :

Comme $A\left(-6;7\right)$ et $G\left(0;\dfrac{11}{2}\right)$ alors $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}0-(-6)\\ \dfrac{11}{2}-7\end{pmatrix}$, ce qui donne $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}6\\ \dfrac{-3}{2}\end{pmatrix}$.

Comme $A\left(-6;7\right)$ et $B\left(14;2\right)$ alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}14-(-6)\\ 2-7\end{pmatrix}$, ce qui donne $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}20\\ -5\end{pmatrix}$.

Le déterminant se calcule donc par :

$$\begin{aligned}
\det\left(\overrightarrow{AG};\overrightarrow{AB}\right) &= \begin{vmatrix}6 & 20\\ \dfrac{-3}{2} & -5\end{vmatrix}\\
\det\left(\overrightarrow{AG};\overrightarrow{AB}\right) &= 6\times(-5)-\frac{-3}{2}\times 20\\
\det\left(\overrightarrow{AG};\overrightarrow{AB}\right) &= -30+60\\
\det\left(\overrightarrow{AG};\overrightarrow{AB}\right) &= 0
\end{aligned}$$

Comme $\det\left(\overrightarrow{AG};\overrightarrow{AB}\right) = 0$ alors les deux vecteurs sont colinéaires. Comme ils ont un point en commun, alors les trois points A, B et G sont alignés. L'objectif de l'exercice est atteint : la trajectoire est rectiligne (à partir de ces trois points).

3. Posons $M\left(x;y\right)$. Alors $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+6\\ y-7\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}20\\ -5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{GB}\begin{pmatrix}14\\ \dfrac{-7}{2}\end{pmatrix}$.

L'égalité $\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{GB}$ se traduit par $\begin{cases}x+6 &= \dfrac{1}{2}\times 20-14\\ y-7 &= \dfrac{1}{2}\times(-5)+\dfrac{7}{2}\end{cases}$

Ce qui donne $\begin{cases}x &= -10\\ y &= 8\end{cases}$ Donc les coordonnées de M sont $M\left(-10;8\right)$

Exercice 2

1. Pour calculer la norme de $\overrightarrow{IJ}$, il faut d'abord calculer ses coordonnées. Comme $I\left(8;\frac{7}{2}\right)$ et $J\left(-4;\frac{13}{2}\right)$ alors alors $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}-4-8\\ \frac{13}{2}-\frac{7}{2}\end{pmatrix}$, ce qui donne $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}-12\\ 3\end{pmatrix}$. Le calcul de la norme donne donc :

$$\begin{aligned}\left\|\overrightarrow{IJ}\right\| &= \sqrt{(-12)^2+3^2}\\ \left\|\overrightarrow{IJ}\right\| &= \sqrt{144+9}\\ \left\|\overrightarrow{IJ}\right\| &= \sqrt{153}\\ \left\|\overrightarrow{IJ}\right\| &= 3\sqrt{17}\end{aligned}$$

La norme du vecteur $\overrightarrow{IJ}$ est $\left\|\overrightarrow{IJ}\right\| = 3\sqrt{17}$.

2. Pour montrer que le milieu de $[IJ]$ et le point E sont confondus, on détermine les coordonnées de ce milieu. Appelons le provisoirement K. On a alors $K\left(\frac{8-4}{2};\frac{\frac{7}{2}+\frac{13}{2}}{2}\right)$, ce qui donne $K(2;5)$. Ce sont les mêmes coordonnées que le point E : les points sont donc bien confondus.

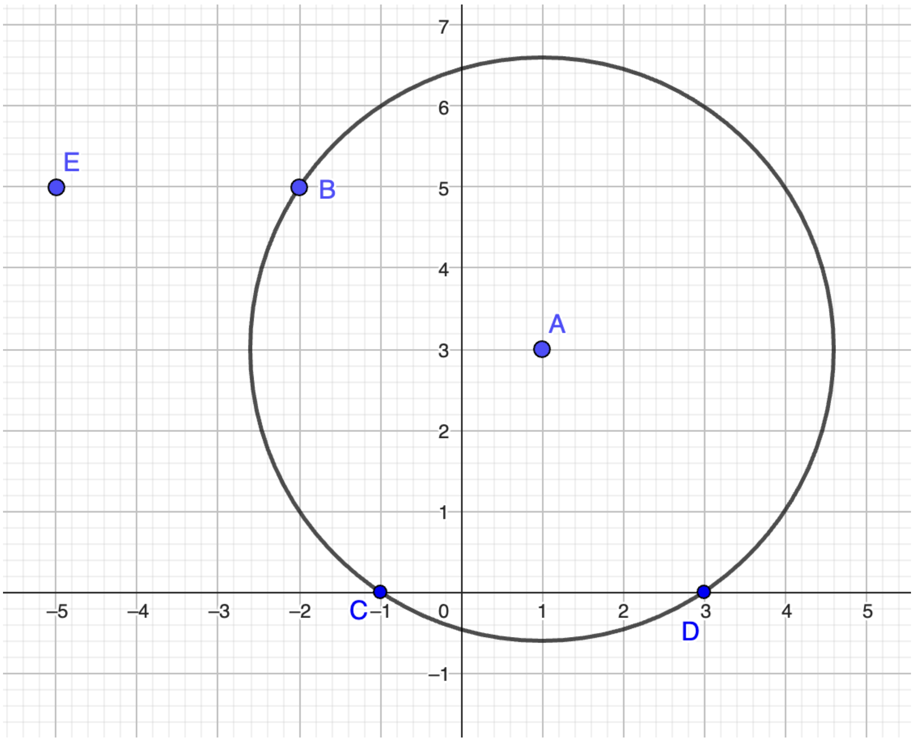
3. Pour que $OJIL$ soit un parallélogramme, il faut que, par exemple, $\overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{LI}$. Pour obtenir cette égalité, il nous faut les coordonnées de chaque vecteur :
Comme $O(0;0)$ et $J\left(-4;\frac{13}{2}\right)$ alors alors $\overrightarrow{OJ}\begin{pmatrix}-4\\ \frac{13}{2}\end{pmatrix}$.
Comme $L(x_L;y_L)$ et $I\left(8;\frac{7}{2}\right)$ alors alors $\overrightarrow{LI}\begin{pmatrix}8-x_G\\ \frac{7}{2}-y_L\end{pmatrix}$.
On utilise l'égalité vectorielle et on obtient :

$$\begin{cases}8-x_G &= -4\\ \frac{7}{2}-y_L &= \frac{13}{2}\end{cases}$$
$$\begin{cases}x_G &= 12\\ y_L &= -3\end{cases}$$

Les coordonnées du point L sont $L(12;-3)$.

Exercice 3

1 La figure avec les cinq points dans un repère $(O;x;y)$ donne :



2 Pour étudier le parallélisme des droites (AB) et (ED), on étudie la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{ED}$. Pour cela, il faut déterminer leurs coordonnées :

Comme $A\,(1;3)$ et $B\,(-2;5)$ alors alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2-1\\5-3\end{pmatrix}$, ce qui donne $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$.

Comme $E\,(-5;5)$ et $D\,(3;0)$ alors alors $\overrightarrow{ED}\begin{pmatrix}3-(-5)\\0-5\end{pmatrix}$, ce qui donne $\overrightarrow{ED}\begin{pmatrix}8\\-5\end{pmatrix}$.

L'étude de la colinéarité des deux vecteurs s'effectue par le calcul de leur déterminant :

$$\det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{ED}\right) = \begin{vmatrix}-3 & 8\\2 & -5\end{vmatrix}$$
$$\det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{ED}\right) = (-3)\times(-5) - 2\times 8$$
$$\det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{ED}\right) = 15 - 16$$
$$\det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{ED}\right) = -1$$

Comme $\det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{ED}\right) \neq 0$ alors les deux vecteurs ne sont pas colinéaires. Par conséquent, leur direction ne sont pas parallèles : les deux droites (AB) et (ED) ne sont pas parallèles.

3 Pour montrer que les points B, D et C sont cocycliques, on montre par exemple l'égalité des normes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AC}$:

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$
$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(-2-1)^2 + (5-3)^2}$$
$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(-3)^2 + (2)^2}$$
$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{9+4}$$
$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{13}$$

$$\left\|\overrightarrow{AD}\right\| = \sqrt{(x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2}$$
$$\left\|\overrightarrow{AD}\right\| = \sqrt{(3-1)^2 + (0-3)^2}$$
$$\left\|\overrightarrow{AD}\right\| = \sqrt{(2)^2 + (-3)^2}$$
$$\left\|\overrightarrow{AD}\right\| = \sqrt{4+9}$$
$$\left\|\overrightarrow{AD}\right\| = \sqrt{13}$$

$$\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2}$$
$$\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{(-1-1)^2 + (0-3)^2}$$
$$\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2}$$
$$\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{4+9}$$
$$\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{13}$$

On remarque que les normes sont identiques. Les vecteurs sont issus du même point A dont les vecteurs sont cocycliques.

4 Comme les points B, C et D appartiennent au même cercle, alors ce cercle est circonsrit au triangle BCD. Les trois médiatrices du triangle sont donc concourantes en un point, centre de ce cercle, soit le point A. Le point d'intersection de la médiatrice du segment $[CD]$ avec la droite (EA) est donc le point A.

Exercice 4 *(Eléments de correction)*

On peut calculer les trois normes des vecteurs. On obtient :

$$a = \left\|\overrightarrow{BC}\right\| \qquad b = \left\|\overrightarrow{AC}\right\| \qquad c = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|$$
$$a = 12 \qquad b = 4\sqrt{2} \qquad c = 4\sqrt{5}$$

L'utilisation d'une des trois formules d'Al-Kashi donne :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\left(\widehat{BAC}\right)$$
$$\widehat{BAC} = \arccos\left(\frac{c^2 - a^2 - b^2}{-2ab}\right)$$
$$\widehat{BAC} = 45$$

Avec le programme Python, on obtient la même réponse.