MATHEMATIQUES - 2^{nde} Année Scolaire 2023-2024

Evaluation n°4 - *(Correction)* Vendredi 19 janvier 2024

Exercice 1

1. L'ensemble de définition D_f n'est pas centré en 0. La fonction f est donc ni paire, ni impaire. On peut aussi répondre à la question en évoquant le fait que la courbe représentative de f dans le repère n'admet pas pour axe de symétrie, l'axe des ordonnées ou n'admet pas pour centre de symétrie, l'origine du repère.

2. Lire l'image de 0 par f revient à lire l'ordonnée du point de la courbe (C_f) dont l'abscisse est $x=0$. Par lecture graphique, on lit $f(0)=1$.

3. Déterminer les antécédents de 1 par f revient à lire les abscisses des points de la courbe (C_f) dont l'ordonnée est $y=1$. Par lecture graphique, on obtient $x=-0,6$; $x=0$ et $x=1,6$.

4. La construction du tableau des variations de f sur D_f donne :

x	$\frac{-5}{4}$		$\frac{-1}{3}$		1		$\frac{7}{4}$
Variations de f	-1.22	$\nearrow$	1.2	$\searrow$	0	$\nearrow$	1.55

5. Sur l'intervalle $\left[0;\frac{7}{4}\right]$, un premier extremum est $m=0$ atteint par f en $x=1$ et un deuxième est $M\simeq 1,55$ atteint par f en $x=\frac{7}{4}$.

Exercice 2

1. Les calculs de $g\left(\frac{1}{3}\right)$ et $h\left(\frac{1}{6}\right)$ donnent :

$$g(x)=2x^2-20x+51$$
$$g\left(\frac{1}{3}\right)=2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2-20\times\frac{1}{3}+51$$
$$g\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{9}-\frac{20}{3}+51$$
$$g\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{9}-\frac{60}{9}+\frac{459}{9}$$
$$g\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{401}{9}$$

$$h(x)=(x-10)^2$$
$$h\left(\frac{1}{6}\right)=\left(\frac{1}{6}-10\right)^2$$
$$h\left(\frac{1}{6}\right)=\left(\frac{1}{6}-\frac{60}{6}\right)^2$$
$$h\left(\frac{1}{6}\right)=\left(\frac{59}{6}\right)^2$$
$$h\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{3481}{36}$$

2. Résolvons l'équation $g(x) = h(x)$:

$$\begin{aligned} g(x) &= h(x) \\ 2x^2 - 20x + 51 &= (x-10)^2 \\ 2x^2 - 20x + 51 &= x^2 - 20x + 100 \\ 2x^2 - 20x + 51 - x^2 + 20x - 100 &= 0 \\ x^2 - 49 &= 0 \\ (x-7)(x+7) &= 0 \end{aligned}$$

Un produit de facteurs est nul si au moins l'un d'eux est nul. On a alors deux équations à résoudre :

On a d'une part $x - 7 = 0$, $x = 7$ et d'autre part $x + 7 = 0$, $x = -7$

Les solutions de l'équation $g(x) = h(x)$ sont $x = -7$ et $x = 7$.

3. Etudions la parité de g sur D_g :
D_g est centré en 0.
De plus :

$$\begin{aligned} g(x) &= 2x^2 - 20x + 51 \\ g(-x) &= 2(-x)^2 - 20 \times (-x) + 51 \\ g(-x) &= 2x^2 + 20x + 51 \\ -g(-x) &= -2x^2 - 20x - 51 \end{aligned}$$

On remarque que $g(x) \neq g(-x)$ et $g(x) \neq -g(-x)$ donc on peut en conclure que la fonction g est ni paire ni impaire sur D_g.

4. Etudions la parité de k sur D_k :
D_k est centré en 0.
De plus :

$$\begin{aligned} k(x) &= h(x) + 20x \\ k(x) &= (x-10)^2 + 20x \\ k(x) &= x^2 - 20x + 100 + 20x \\ k(x) &= x^2 + 100 \\ k(-x) &= (-x)^2 + 100 \\ k(-x) &= x^2 + 100 \end{aligned}$$

On remarque que $k(x) = k(-x)$ donc on peut en conclure que la fonction k est paire sur D_k.

5. La fonction g est ni paire ni impaire sur D_g : on ne peut rien conclure comme particularité géométrique de la courbe (C_g).
En revanche, comme la fonction k est paire sur D_k, on peut en déduire que la courbe (C_k) est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Exercice bonus

1. Déterminer D_p revient à chercher tous les nombres x pour lesquels la fonction p est définie. Il est plus rapide de chercher les nombres x pour lesquels p n'est pas définie. Autrement dit, il faut résoudre l'équation $n(x) = 0$:

$$\begin{aligned} n(x) &= 0 \\ 1 + 25x^2 - 10x &= 0 \\ (5x-1)^2 &= 0 \\ 5x - 1 &= 0 \\ x &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

On en conclue que $D_p = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{5}\right\}$.

2. Résolvons $k(x) = 0$:

$$\begin{aligned} k(x) &= 0 \\ \frac{m(x)}{n(x)} &= 0 \\ \frac{36x^2 + 1 - 12x}{1 + 25x^2 - 10x} &= 0 \\ \frac{(6x-1)^2}{(5x-1)^2} &= 0 \end{aligned}$$

Un quotient est nul si son dénominateur est non nul et si son numérateur est nul. La non nullité du dénominateur est déjà étudiée en question 1. Il reste à résoudre :

$$\begin{aligned} (6x-1)^2 &= 0 \\ 6x - 1 &= 0 \\ x &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

La solution de l'équation $k(x) = 0$ est $x = \frac{1}{6}$.