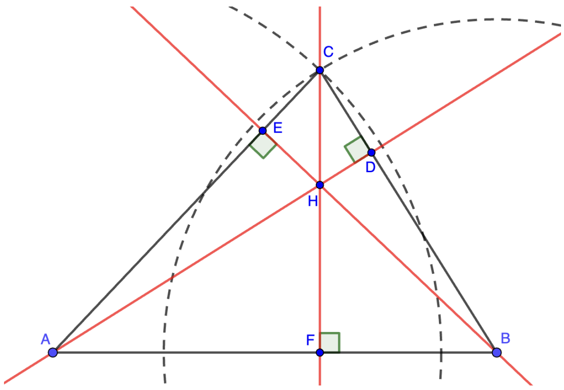
MATHEMATIQUES - 2nde | Année Scolaire 2022-2023

Evaluation n°3 - *(Correction)* | Lundi 18 décembre 2023

Exercice 1

1. La figure complète donne :



2. Les segments $[AD]$, $[BE]$ et $[CF]$ sont issus de chaque sommet. Les points D E et F étant les projetés orthogonaux respectifs des trois sommets sur les côtés opposés, les segments $[AD]$, $[BE]$ et $[CF]$ sont donc les trois hauteurs du triangle. Par définition, elles sont concourantes.

3. Le nom donné au point d'intersection des trois hauteurs est l'orthocentre.

Exercice 2

1. La loi fondamentale de la trigonométrie est $\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha)=1$.

2. Pour montrer que $\sin(\alpha)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, on utilise la loi fondamentale de la trigonométrie :

$$\begin{aligned}
\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha) &= 1\\
\sin^2(\alpha) &= 1-\cos^2(\alpha)\\
\sin^2(\alpha) &= 1-\left(\frac{-1}{2}\right)^2\\
\sin^2(\alpha) &= 1-\frac{1}{4}\\
\sin^2(\alpha) &= \frac{3}{4}\\
\sin^2(\alpha)-\frac{3}{4} &= 0\\
\left[\sin(\alpha)-\frac{\sqrt{3}}{2}\right]\left[\sin(\alpha)+\frac{\sqrt{3}}{2}\right] &= 0
\end{aligned}$$

Un produit de facteurs est nul si au moins l'un d'eux est nul. On alors :

D'une part $\sin(\alpha) - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$ et d'autre part $\sin(\alpha) + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$

$$\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad\qquad \sin(\alpha) = \frac{-\sqrt{3}}{2} = 0$$

On a bien le résultat $\sin(\alpha) = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. On a les résultats $\cos(\alpha) = \frac{-1}{2}$ et $\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Ainsi :

$$\begin{cases} \cos(\alpha) & = \frac{-1}{2} \\ \sin(\alpha) & = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha & = \arccos\left(\frac{-1}{2}\right) \\ \alpha & = \arcsin\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha & = 120° \\ \alpha & = 60° \text{ ou } \alpha = 120° \text{ ou } \alpha = -60° \text{ ou } \alpha = -120° \end{cases}$$

On retient donc $\alpha = 120°$.

Exercice 3

1. Le cercle est inscrit au triangle. Les côtés du triangle sont donc tangents au cercle. C'est le cas au point E : la droite (AC) est une tangente au cercle. Elle est donc perpendiculaire au rayon en E. Or, ce rayon est le segment $[OE]$. On a alors $(AC) \perp [OE]$. On peut ainsi conclure que la droite (OE) est perpendiculaire à la droite (AC).

2. Le cercle est inscrit au triangle. Le point O est donc le point d'intersection des trois bissectrices du triangle, dont la droite (CO). Elle partage donc l'angle $\widehat{ACB}$ en 2 angles égaux $\widehat{ECO}$ et $\widehat{OCB}$. On a alors :

$$\widehat{ECO} = \frac{1}{2}\widehat{ACB}$$
$$\widehat{ECO} = \frac{1}{2} \times 21,66$$
$$\widehat{ECO} = 10,83$$

L'angle $\widehat{ECO}$ mesure 10,83°.

Exercice 4 *(Bonus et facultatif)*

1. La personne célèbre est Yoda.

2. A l'aide des égalités d'Al-Kashi, on peut écrire :

$$\begin{cases} a^2 &= b^2+c^2-2bc\cos(\alpha) \\ b^2 &= a^2+c^2-2ac\cos(\beta) \\ c^2 &= a^2+b^2-2ab\cos(\gamma) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2bc\cos(\alpha) &= -a^2+b^2+c^2 \\ 2ac\cos(\beta) &= -b^2+a^2+c^2 \\ 2ab\cos(\gamma) &= -c^2+a^2+b^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos(\alpha) &= \frac{-a^2+b^2+c^2}{2bc} \\ \cos(\beta) &= \frac{-b^2+a^2+c^2}{2ac} \\ \cos(\gamma) &= \frac{-c^2+a^2+b^2}{2ab} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha &= \arccos\left(\frac{-a^2+b^2+c^2}{2\times 7\times 8}\right) \\ \beta &= \arccos\left(\frac{-b^2+a^2+c^2}{2ac}\right) \\ \gamma &= \arccos\left(\frac{-c^2+a^2+b^2}{2ab}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha &= \arccos\left(\frac{-6^2+7^2+8^2}{2bc}\right) \\ \beta &= \arccos\left(\frac{-7^2+6^2+8^2}{2\times 6\times 8}\right) \\ \gamma &= \arccos\left(\frac{-8^2+6^2+7^2}{2\times 6\times 7}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha &\simeq 46{,}57^\circ \\ \beta &\simeq 57{,}91^\circ \\ \gamma &\simeq 75{,}52^\circ \end{cases}$$