MATHEMATIQUES - 2^nde^ Année Scolaire 2022-2023

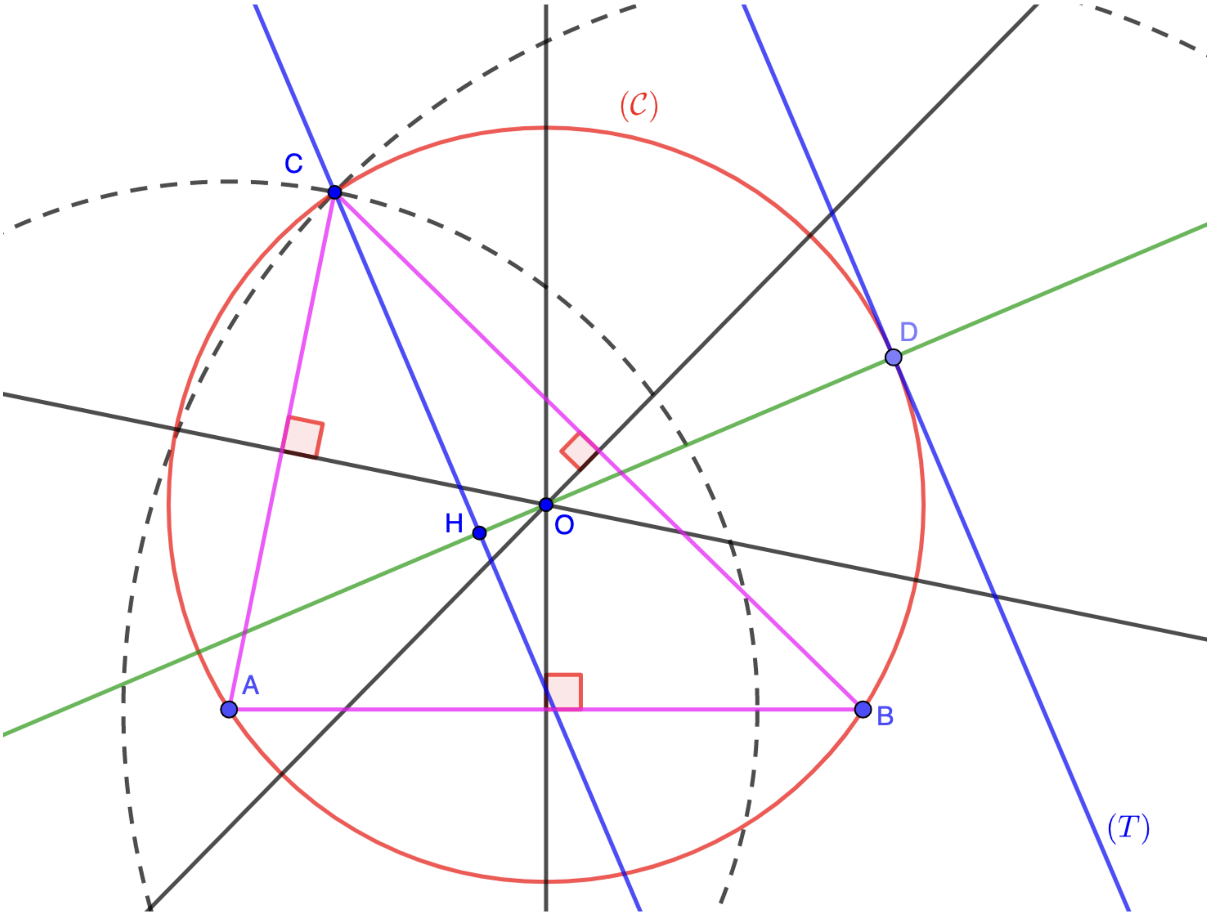
Evaluation n°6 Jeudi 15 décembre 2022

Indications : Durée 1h15 - calculatrice autorisée

Compétences évaluées : Calculer - représenter - raisonner

Exercice 1

Question 1 : Le schéma demandé devient le suivant :



Question 2 : Comme H est le projeté orthogonal de C sur la droite (OD) alors les droites (CH) et (OD) sont perpendiculaires.
Comme (T) est la tangente au cercle $(\mathscr{C})$ au point D alors les droites (T) et (OD) sont perpendiculaires.
Or, comme deux droites perpendiculaires à une troisième droite sont parallèles, on en déduit que les droites (T) et (CH) sont parallèles.

Exercice 2

Question 1 : Le point d'intersection des trois hauteurs d'un triangle s'appelle l'orthocentre.

Question 2 : Le segment $[OH]$ est une hauteur du triangle OMD. Le segment est donc perpendiculaire au segment $[MD]$. Le triangle OHD est donc rectangle en H.

Question 3 : Le triangle ODM est rectangle en H. On peut donc utiliser la trigonométrie :

$$\begin{aligned}\sin(\gamma) &= \frac{OH}{OD}\\ \frac{OH}{OD} &= \sin(\gamma)\\ OH &= OD \times \sin(\gamma)\\ OH &= 4\sqrt{2} \times \sin(\gamma) \text{ car } OD = 4\sqrt{2}\end{aligned}$$

On arrive bien à $OH = 4\sqrt{2} \times \sin(\gamma)$

Question 4 : Comme $OH = 4\sqrt{2} \times \sin(\gamma)$ alors :

$$\begin{aligned}OH &= 4\sqrt{2} \times \sin(\gamma)\\ OH &= 4\sqrt{2} \times \sin(40)\\ OH &\simeq 3,6\end{aligned}$$

La longueur OH à 10^{-1} près est $OH = 3,6$ cm

Question 5 : Le triangle ODM est rectangle en H. On peut donc utiliser le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned}OD^2 &= OH^2 + HD^2\\ HD^2 &= OD^2 - OH^2\\ HD &= \sqrt{OD^2 - OH^2}\\ HD &= \sqrt{\left(4\sqrt{2}\right)^2 - 3,6^2}\\ HD &= \sqrt{4^2 \times \sqrt{2}^2 - 3,6^2}\\ HD &\simeq 4,36\end{aligned}$$

La longueur HD est d'environ 44 mm.

Question 6 : Les points M, H et D sont alignés. On peut donc écrire :

$$\begin{aligned}MH + HD &= MD\\ HM &= MD - HD\\ HM &= 5\sqrt{2} - 4,4\\ HM &\simeq 2,76\end{aligned}$$

La longueur HM est d'environ 27 mm.

Exercice 3

Question 1 : Cette relation est attribuée à Al-Kashi

Question 2 : On part de l'expression donnée dans l'énoncé :

$$\begin{aligned}
OD^2 &= OM^2 + DM^2 - 2DM \times OM \cos(\beta) \\
OM^2 + DM^2 - 2DM \times OM \cos(\beta) &= OD^2 \\
-2DM \times OM \cos(\beta) &= OD^2 - OM^2 - DM^2 \\
\cos(\beta) &= \frac{OD^2 - OM^2 - DM^2}{-2DM \times OM} \\
\beta &= \arccos\left(\frac{OD^2 - OM^2 - DM^2}{-2DM \times OM}\right) \\
\beta &= \arccos\left[\frac{\left(4\sqrt{2}\right)^2 - \left(3\sqrt{2}\right)^2 - \left(5\sqrt{2}\right)^2}{-2 \times 5\sqrt{2} \times 3\sqrt{2}}\right)] \\
\beta &= \arccos\left(\frac{16\sqrt{2}^2 - 9\sqrt{2}^2 - 25\sqrt{2}^2}{-30\sqrt{2}^2}\right) \\
\beta &= \arccos\left(\frac{16 - 9 - 25}{-30}\right) \\
\beta &= \arccos\left(\frac{3}{5}\right)
\end{aligned}$$

A la calculatrice, l'angle β est d'environ 53°.

Question 3 : La somme ds trois angles dans un triangle est égale à 180° :

$$\begin{aligned}
\beta + \gamma + \widehat{MOD} &= 180 \\
\widehat{MOD} &= 180 - \beta - \gamma \\
\widehat{MOD} &= 180 - 53 - 40 \\
\widehat{MOD} &= 87
\end{aligned}$$

L'angle $\widehat{MOD}$ est de 87°.