MATHEMATIQUES - 2nde Année Scolaire 2022-2023

Evaluation n°13 - *Correction* Jeudi 25 mai 2023

Exercice 1

■ **1 :** Montrons que le point I, milieu de $[AB]$, a pour coordonnées $I\,(-1;-1)$:
Comme $A\,(-4;1)$ et $B\,(2;-3)$, alors $I\left(\dfrac{x_A+x_B}{2};\dfrac{y_A+y_B}{2}\right)$, ce qui donne $I\left(\dfrac{-4+2}{2};\dfrac{1-3}{2}\right)$, soit $I\,(-1;-1)$, ce qu'il fallait démontrer.

■ **2 :** La droite (d) est la médiatrice su segment $[AB]$. Elle passe donc par le point I. Elle passe aussi par le point C car le triangle est isocèle. Pour déterminer l'équation cartésienne de la droite (d), c'est-à-dire la droite (IC), on considère un troisième point M de coordonnées $M\,(x;y)$ appartenant à la droite (IC).

On forme le vecteur $\overrightarrow{IC}$ avec $\overrightarrow{IC}\begin{pmatrix}x_C-x_I\\y_C-y_I\end{pmatrix}$, ce qui donne $\overrightarrow{IC}\begin{pmatrix}3+1\\5+1\end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{IC}\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}$.

De la même façon, on forme le vecteur $\overrightarrow{IM}$ et on obtient $\overrightarrow{IM}\begin{pmatrix}x+1\\y+1\end{pmatrix}$.

Comme les points I, C et M appartiennent à la même droite, les vecteurs $\overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{IM}$ sont colinéaires. Leur déterminant est donc nul :

$$\begin{aligned}
\det\left(\overrightarrow{IC};\overrightarrow{IM}\right) &= 0\\
\begin{vmatrix}4 & x+1\\6 & y+1\end{vmatrix} &= 0\\
4\,(y+1)-6\,(x+1) &= 0\\
4y+4-6x-6 &= 0\\
-6x+4y-2 &= 0\\
3x-2y+1 &= 0
\end{aligned}$$

Une équation cartésienne de la droite (d) est $3x-3y+1=0$.

■ **3 :** L'équation cartésienne de la droite (d) étant $3x-2y+1=0$, on en déduit que son équation réduite :

$$\begin{aligned}
3x-2y+1 &= 0\\
-2y &= -3x-1\\
y &= \frac{3}{2}x+\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Une équation réduite de la droite (d) est $y=\dfrac{3}{2}x+\dfrac{1}{2}$.

Exercice 2

■ **1 :** L'équation cartesienne de la droite (d_1) s'écrit sous la forme $ax+by+c=0$. Un vecteur directeur est $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$. or, ici, $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$ donc on en déduit que $-b=4$ et $a=-2$. L'équation devient donc $-2x-4y+c=0$. Pour déterminer le paramètre c, on utilise le fait que la droite passe par le point F. Ses coordonnées vérifient l'équation :

$$\begin{aligned}-2x-4y+c&=0\\-2\times3-4\times1+c&=0\\-6-4+c&=0\\c&=6+4\\c&=10\end{aligned}$$

Une équation cartésienne de la droite (d_1) est $-2x-4y+10=0$ ou encore $x+2y-5=0$.

■ **2 :** Montrons que le point G appartient à la droite (d_1). Pour cela, les coordonnées du point G vérifient l'équation de la droite :

$$\begin{aligned}x+2y-5&=-3+2\times4-5\\&=-3+8-5\\&=8-8\\&=0\end{aligned}$$

Les coordonnées de G vérifient l'équation : le point G appartient bien à la droite (d_1).

■ **3 :** La deuxième droite (d_2) a pour équation cartésienne $5x+10y-25=0$. Un vecteur directeur de cette droite est donc $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}-10\\5\end{pmatrix}$. On calcule ensuite le déterminant des deux vecteurs directeurs respectifs des deux droites :

$$\begin{aligned}\det(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})&=\begin{vmatrix}4&-10\\-2&5\end{vmatrix}\\&=4\times5+10\times(-2)\\&=20-20\\&=0\end{aligned}$$

Comme $\det(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})=0$, alors les deux vecteurs directeurs sont colinéaires : les deurx droites sont parallèles.

Exercice 3

■ **1 :** Avec une équation cartésienne du type $ax+by+c=0$, un vecteur directeur est $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$.

Alors pour chaque droite :

$(d_1) : -2x+3y-4=0$ $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix}$

$(d_2) : -x+2y-1=0$ $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$

$(d_3) : -x+6y+7=0$ $\overrightarrow{u_3}\begin{pmatrix}-6\\-1\end{pmatrix}$

■ **2 :** Les coordonnées de chaque vecteur ne sont pas proportionnelles deux à deux. On n'obtient donc pas de relation de colinéarité du type $\overrightarrow{u_1}=k\overrightarrow{u_2}$. On en déduit que les vecteurs ne sont pas colinéaires. On peut retrouver ce résultat en calculant le déterminant des vecteurs deux à deux et les résultats seront non nuls.

■ **3 :** Les trois droites étant concourantes, on détermine les coordonnées du point d'intersection en résolvant par exemple le système de deux équations à deux inconnues $\begin{cases}-2x+3y-4 &=0\\ -x+2y-1 &=0\end{cases}$. On résout ce système par substitution :

$$\begin{cases}-2x+3y-4 &=0\\ -x+2y-1 &=0\end{cases}$$
$$\begin{cases}-2x+3y-4 &=0\\ x &=2y-1\end{cases}$$
$$\begin{cases}-2\left(2y-1\right)+3y-4 &=0\\ x &=2y-1\end{cases}$$
$$\begin{cases}-4y+2+3y-4 &=0\\ x &=2y-1\end{cases}$$
$$\begin{cases}-y-2 &=0\\ x &=2y-1\end{cases}$$
$$\begin{cases}y &=-2\\ x &=2\times(-2)-1\end{cases}$$
$$\begin{cases}y &=-2\\ x &=-5\end{cases}$$

Les coordonnées du point d'intersection des trois droites sont $I\left(-5;-2\right)$.