MATHEMATIQUES - 2$^{\text{nde}}$ Année Scolaire 2022-2023

Evaluation n°12 - *Correction* Jeudi 4 mai 2023

Exercice 1

■ **1 :** Le tableau de signes pour chaque fonction donne sur l'intervalle $[0; 2\pi]$:

x	0		π		2π
Signe de $f(x)$	0	$+$	0	$-$	0

x	0		π		2π
Signe de $g(x)$		$-$	0	$+$	

x	0		π		2π
Signe de $h(x)$		$+$		$+$	0

■ **2 :** Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leqslant g(x)$ sur l'intervalle $[0; 10]$ revient à chercher les abscisses des points de la courbe (C_f) dont les ordonnées sont supérieures ou égales à celles des points de la courbe (C_g). Par lecture graphique, on obtient l'intervalle $[\pi; 10]$.

■ **3 :** Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) > h(x)$ sur l'intervalle $[0; 10]$ revient à chercher les abscisses des points de la courbe (C_f) dont les ordonnées sont supérieures strictement à celles des points de la courbe (C_h). Par lecture graphique, on obtient l'intervalle $[2\pi; 10]$.

Exercice 2

■ **1 :** La résolution de l'équation $u(x) = v(x)$ donne :

$$\begin{aligned}
u(x) &= v(x) \\
-x+2 &= \frac{1+2x}{3} \\
-x - \frac{-2x}{3} &= \frac{1}{3} - 2 \\
\frac{-3x-2x}{3} &= \frac{1}{3} - \frac{6}{3} \\
-5x &= -5 \\
x &= 1
\end{aligned}$$

La solution de l'équation est $x = 1$.

■ **2 :** Résolvons l'inéquation $u(x)\,v(x) < 0$:

$$u(x)\,v(x) < 0$$
$$(-x+2)\left(\frac{1+2x}{3}\right) < 0$$

La fonction $x \longmapsto -x+2$ est une fonction affine dont le coefficient directeur est -1. Comme $-1 < 0$, la fonction est décroissante et la valeur charnière s'obtient par :

$$\begin{aligned} -x+2 &= 0 \\ -x &= -2 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

La fonction $x \longmapsto \dfrac{1+2x}{3}$ est une fonction affine dont le coefficient directeur est $\dfrac{2}{3}$. Comme $\dfrac{2}{3} > 0$, la fonction est croissante et la valeur charnière s'obtient par :

$$\begin{aligned} \frac{1+2x}{3} &= 0 \\ \frac{2x}{3} &= \frac{-1}{3} \\ x &= \frac{-1}{2} \end{aligned}$$

Le tableau de signe devient alors :

x	$-\infty$		$\frac{-1}{2}$		2		$+\infty$
Signe de $-x+2$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $\frac{1+2x}{3}$			0	$+$		$+$	
Signe du produit		$-$	0	$+$	0	$-$	

A partir du tableau, les solutions de l'inéquation $u(x)\,v(x) < 0$ sont dans l'ensemble S tel que : $S = \left]-\infty; \frac{-1}{2}\right[\cup \left]2; +\infty\right[$.

Exercice 3

■ **1 :** La résolution de cette inéquation revient à résoudre l'inéquation $\dfrac{x-5}{25-4x^2} > 0$; Ce qui donne :

$$\begin{aligned} \frac{x-5}{25-4x^2} &> 0 \\ \frac{x-5}{(5-2x)(5+2x)} &> 0 \end{aligned}$$

Le dénominateur ne doit pas être nul. Cette condition impose de résoudre l'équation $(5-2x)(5+2x) = 0$. Pour cela, un produit de facteurs est nul si au moins l'un d'eux est nul.

On a d'une part : $5+2x=0$

$$\begin{aligned} 5+2x &= 0 \\ 2x &= -5 \\ x &= \frac{-5}{2} \end{aligned}$$

et d'autre part $5-2x=0$

$$\begin{aligned} 5-2x &= 0 \\ -2x &= -5 \\ x &= \frac{-5}{-2} \end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi deux valeurs interdites $x = \dfrac{-5}{2}$ et $x = \dfrac{5}{2}$.

■ **2 :** Résolvons l'inéquation $\dfrac{e(x)}{d(x)} > 0$:

$$\begin{aligned} \frac{e(x)}{d(x)} &> 0 \\ \frac{x-5}{(5-2x)(5+2x)} &> 0 \end{aligned}$$

La fonction $x \longmapsto x-5$ est une fonction affine dont le coefficient directeur est 1. Comme $1 > 0$, la fonction est croissante et la valeur charnière s'obtient par :

$$\begin{aligned} x-5 &= 0 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

La fonction $x \longmapsto 5-2x$ est une fonction affine dont le coefficient directeur est -2. Comme $-2 < 0$, la fonction est croissante et la valeur charnière s'obtient par :

$$\begin{aligned} 5-2x &= 0 \\ -2x &= -5 \\ x &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

La fonction $x \longmapsto 5-2x$ est une fonction affine dont le coefficient directeur est -2. Comme $-2 < 0$, la fonction est croissante et la valeur charnière s'obtient par :

$$\begin{aligned} 5+2x &= 0 \\ 2x &= -5 \\ x &= \frac{-5}{2} \end{aligned}$$

Le tableau de signe devient alors :

x	$-\infty$		$\frac{-5}{2}$		$\frac{5}{2}$		5		$+\infty$
Signe de $x-5$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $5+2x$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
Signe de $5-2x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
Signe du quotient		$+$	$\|$	$-$	$\|$	$+$	0	$-$	

A partir du tableau, les solutions de l'inéquation $\dfrac{x-5}{(5-2x)(5+2x)} > 0$ sont dans l'ensemble S tel que

$S = \left]-\infty; \dfrac{-5}{2}\right[\cup \left]\dfrac{5}{2}; 5\right[$.

Exercice 4

■ **1 :** Pour la fonction h, la valeur -2 est n'est pas une valeur interdite. Le résultat est égal à 0. Enfin, le signe résultant de la dernière colonne donne un signe positif. Les deux erreurs sont modifiées de la façon suivante :

x	$-\infty$		-2		-1		1		3		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
Signe de $g(x)$		$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
Signe de $h(x)$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
Signe de $k(x)$		$+$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe du quotient		$+$	$\|$	$-$	0	$+$	0	$-$	$\|$	$+$	

■ **2 :** D'après le tableau de signe, les solutions sont inclues dans l'ensemble S tel que :
$S =]-2;-1] \cup [1;3[$.