MATHEMATIQUES - 2nde | Année Scolaire 2022-2023

Evaluation n°11 | Jeudi 30 mars 2023

Indications : Durée 100 minutes - calculatrice autorisée

Compétences évaluées : Chercher - représenter - calculer - raisonner - communiquer

Exercice 1

La Pervenche, de la famille des Apocynacées, épouse la forme d'un pentagone, tout comme la Pentagone Solaire :


Ces fleurs sont aux proportions du nombre d'or. A titre d'exemple, cela signifie que le rapport de la longueur du plus grand segment dans le pentagone et celle du plus petit (un des côtés), est égale au nombre d'or.
Autrement dit, si D est la longueur d'un des plus grands segments du pentagone et si d et celle d'un des plus petits (les côtés), alors on a $\frac{D}{d} = \phi$ avec, on le rappelle : $\phi \simeq 1,618$.
On reproduit dans l'annexe 1, le schéma d'un pentagone régulier. On donne quelques coordonnées de points :

$A(-1;5)$ $B(-7;4)$ $C(-7,9;-2,02)$ $F(-2,46;-4,73)$

Dans ce schéma, on prend comme exemple de plus petit segment, le segment $[AE]$ avec donc $AE = d$.
On prend ensuite comme exemple de plus grand segment, le segment $[AF]$ avec donc $AF = D$.

Question 1 : Rappeler la définition d'un pentagone régulier.

Question 2 : Calculer $\left\|\overrightarrow{BA}\right\|$ et en **déduire** la valeur de d.

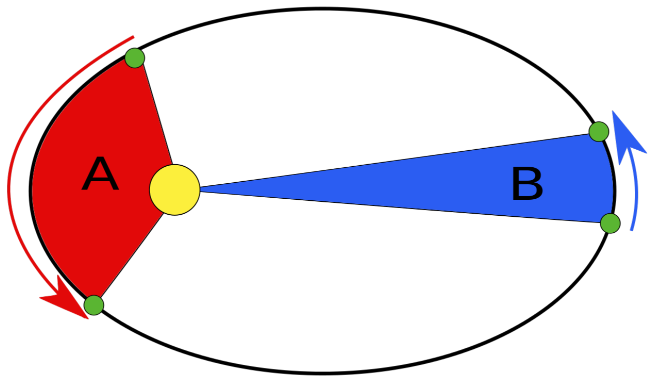
Question 3 : Donner en justifiant la nature du triangle AEF.

Question 4 : Calculer $\left\|\overrightarrow{AF}\right\|$ et en **déduire** la valeur de D.

Question 5 : Montrer que le pentagone, et donc les fleurs citées, sont formés à partir du nombre d'or.

Question 6 : Vérifier par un calcul si les droites (BC) et (AF) sont parallèles.

Exercice 2



Johannes Kepler est un physicien allemand qui a travaillé à la fin du seizième siècle sur le mouvement des planètes autour du Soleil. Ses travaux lui ont permis d'en déduire que les planètes n'effectuent pas des trajectoires circulaires, mais plutôt elliptiques. Isaac Newton s'est servi de ses travaux pour énoncer ensuite ses lois sur la gravitation.
Kepler a énoncé lui aussi trois lois dont la deuxième stipule que les aires balayées par une planète sur une durée identique de trajectoire, sont les mêmes, comme le montre le schéma ci-contre :
On souhaite vérifier cette loi à l'aide d'une modélisation par un système de repérage. Dans un repère orthonormé noté (O,x,y), on place les points suivants :

Le Soleil : $S\,(-3;0)$

La planète à un instant t_1 : $P_1\,(5;-1)$ La planète à un instant t_2 : $P_2\,(5;1)$

La planète à un instant t_8 : $P_8\,(-5;1)$ La planète à un instant t_9 : $P_9\,(-4;y_P)$

La construction est déjà réalisée sur le schéma de l'annexe 2.

L'objectif de l'exercice est de calculer approximativement les aires A_1 et A_2 et vérifier ensuite qu'elles sont approximativement égales.

Question 1 : Rappeler ce qu'est un repère orthonormé.

Question 2 : Calculer les normes des vecteurs $\overrightarrow{SP_1}$ et $\overrightarrow{SP_2}$ ainsi que $\overrightarrow{P_1P_2}$.

Question 3 : En **déduire** la nature du triangle SP_1P_2.

Question 4 : On note H, le projeté orthogonal du point S sur le segment $[P_1;P_2]$.**Lire** graphiquement les coordonnées du point H.

Question 5 : Montrer à l'aide d'un calcul de norme, que $SH = 8$.

Question 6 : Calculer $\left\|\overrightarrow{P_1P_2}\right\|$.

Question 7 : Calculer l'aire B.

Question 8 : On donne une approximation de l'aire A telle que $A = 7{,}98$. **Comparer** les aires A et B puis **conclure** sur la validité de la deuxième loi de Kepler en tenant des approximations grossières qui ont été réalisées.

Question 9 : *(bonus et facultative)* On donne l'équation de l'ellipse : $\dfrac{28022}{100}x^2 + \dfrac{42422}{100}y^2 = \dfrac{742977}{100}$.
Calculer l'ordonnée du point P_9.

Exercice 3

On considère quatre points A, B, C et D tels que dans un repère (O,x,y), leurs coordonnées soient $A(1;5)$, $B(-3;2)$, $C(3;2)$ et $D(x_D;y_D)$

Question 1 : Placer les points A, B et C dans le repère (O,x,y).

Question 2 : Montrer que le triangle ABC n'est pas rectangle.

Question 3 : Calculer x_D et y_D de façon à ce que le quadrilatère $ADCB$ soit un parallélogramme.

Exercice 4

On considère un repère (O,x,y). On considère un cercle $(\mathscr{C})$ de centre O et de rayon $r = 5$. On place sur ce cercle les points B, C, D et E tels que leurs coordonnées soient $B(-3;4)$, $C(-3;-4)$, $D(3;-4)$ et $E(3;4)$.

Question 1 : On pose I le milieu du segment $[BD]$. **Calculer** les coordonnées du point I.

Question 2 : On pose J le milieu du segment $[EC]$. **Calculer** les coordonnées du point J.

Question 3 : Indiquer la position relative des points O, I et J.

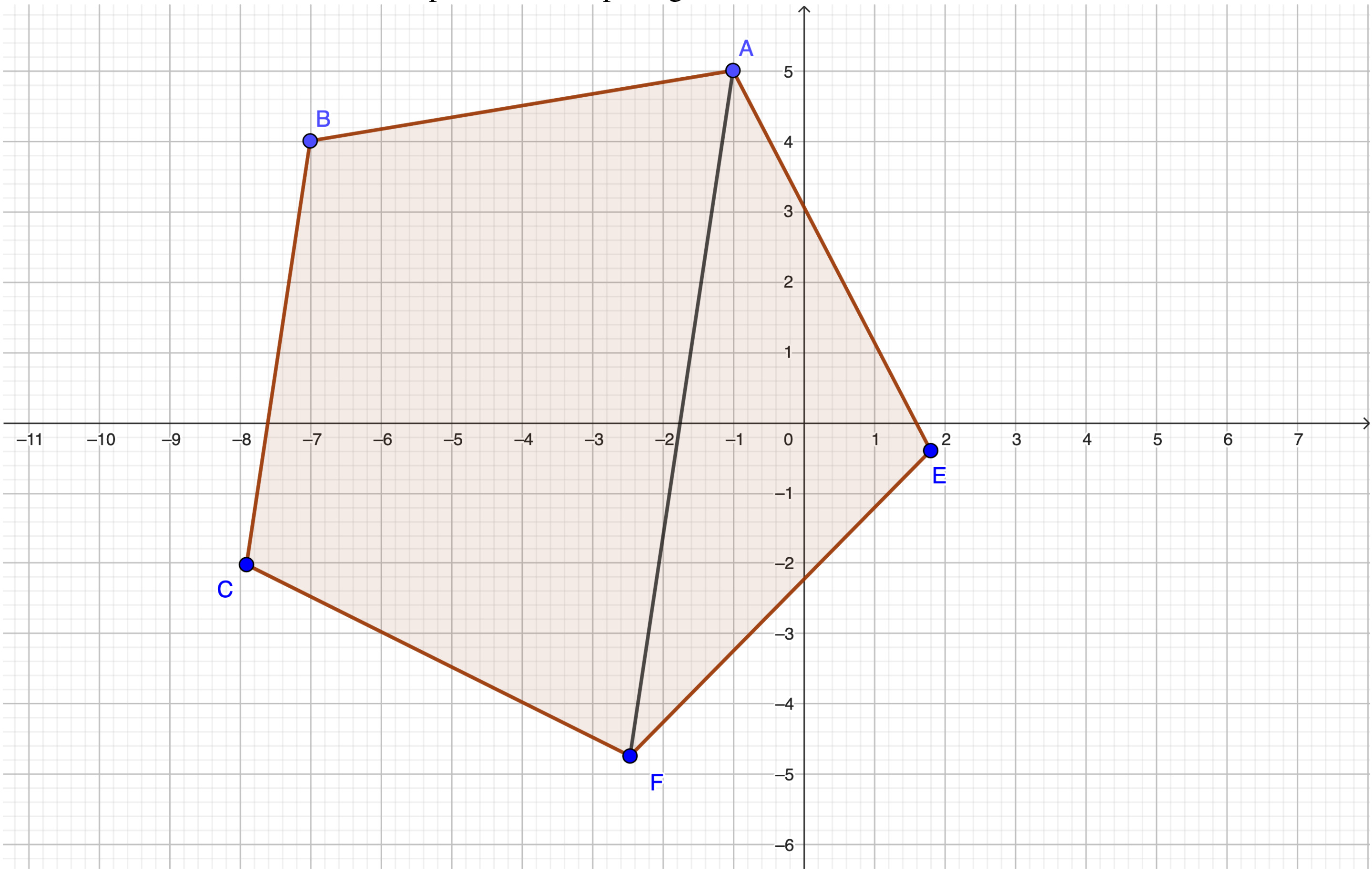
Question 4 : Déduire des questions précédentes, une première indication sur la nature du quadrilatère $BEDC$.

Question 5 : Montrer que le quadrilatère $BEDC$ est un rectangle.

Question 6 : En **déduire** que le cercle $(\mathscr{C})$ est circonscrit au triangle BED

ANNEXE 1

Schéma représentatif du pentagone de l'exercice 1 :



Indication importante : Les valeurs des coordonnées des points C, E et F sont approximatives.

ANNEXE 2

Schéma représentatif de la situation de l'exercice 2 :