MATHEMATIQUES - 2nde Année Scolaire 2022-2023

Evaluation n°11 - *(Rattrapage - Correction)* Mardi 11 avril 2023

Exercice 1

Question 1 : L'image pixélisée a pour dimension 555x898. D'après la projection dans le repère du document annexe 1, on peut ainsi donner les coordonnées demandées : $A(555,0)$, $B(555,898)$ et $C(0,898)$.

Question 2 : Le calcul des normes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CB}$ donne :

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$
$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{[555-555]^2 + (898-0)^2}$$
$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{0^2 + 898^2}$$
$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = 898$$

$$\left\|\overrightarrow{CB}\right\| = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2}$$
$$\left\|\overrightarrow{CB}\right\| = \sqrt{[555-0]^2 + (898-898)^2}$$
$$\left\|\overrightarrow{CB}\right\| = \sqrt{555^2 + 0^2}$$
$$\left\|\overrightarrow{CB}\right\| = 555$$

On obtient $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = 898$ et $\left\|\overrightarrow{CB}\right\| = 555$.

Question 3 : Le rapport de la longueur et de la largeur du tableau se calcule par $\dfrac{CB}{AB}$, ce qui donne $\dfrac{898}{55} \simeq 1,618$. Comme le rapport est sensiblement égal au nombre ϕ, on peut en déduire que les dimensions du tableau sont au nombre d'or.

Question 4 : Le rapport de l'ordonnée y_J et de l'abscisse x_J du point J donne $\dfrac{550}{340}$, ce qui donne approximativement le nombre ϕ. Le point J est bien un point d'or.

Question 5 : Pour étudier l'alignement des points O, J et B, on étudie la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{OJ}$ et $\overrightarrow{OB}$. Pour cela, on calcule leurs coordonnées puis leur déterminant :

Comme $O(0;0)$ et $J(340;550)$ alors $\overrightarrow{OJ}\begin{pmatrix} x_J - x_O \\ y_J - y_O \end{pmatrix}$, ce qui donne : $\overrightarrow{OJ}\begin{pmatrix} 340-0 \\ 550-0 \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{OJ}\begin{pmatrix} 340 \\ 550 \end{pmatrix}$.

Comme $O(0;0)$ et $B(555;898)$ alors $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix} x_B - x_O \\ y_B - y_O \end{pmatrix}$, ce qui donne : $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix} 555-0 \\ 898-0 \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix} 550 \\ 898 \end{pmatrix}$.

Le calcul du déterminant donne :

$$\det\left(\overrightarrow{OJ};\overrightarrow{OB}\right) = \begin{vmatrix} 340 & 555 \\ 550 & 898 \end{vmatrix}$$
$$\det\left(\overrightarrow{OJ};\overrightarrow{OB}\right) = 340 \times 898 - 550 \times 555$$
$$\det\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{AF}\right) = 70$$

Le résultat n'est pas nul, les vecteurs ne sont pas colinéaires, les points ne sont pas alignés. Dans la réalité, ils le sont. Les approximations faites en pixel ne permettent pas d'avoir des résultats précis.

Question 6 : Pour montrer que le point J n'est pas le milieu du segment $[OB]$, on calcule les coordonnées du point I, milieu de $[OB]$: $\begin{cases} x_I &= \dfrac{x_O + x_B}{2} \\ y_I &= \dfrac{y_O + y_B}{2} \end{cases}$ Ce qui donne $\begin{cases} x_I &= \dfrac{555}{2} \\ y_I &= \dfrac{898}{2} \end{cases}$

On remarque que les coordonnées de ce point ne sont pas celles de J : le point J n'est pas le milieu de $[OB]$.

Exercice 2

Question 1 : A partir du deuxième graphique du document de l'annexe 2, les coordonnées des points G, H, I, J et K sont $G(-1;4)$, $H(-1;-1)$, $I(-6;-1)$, $J(2;-1)$ et $K(2;-9)$.

Question 2 : Le calcul des normes des vecteurs $\overrightarrow{HG}$ et $\overrightarrow{HI}$ donne :

$$\begin{aligned} \left\|\overrightarrow{HG}\right\| &= \sqrt{(x_G - x_H)^2 + (y_G - y_H)^2} \\ \left\|\overrightarrow{HG}\right\| &= \sqrt{[-1-(-1)]^2 + [4-(-1)]^2} \\ \left\|\overrightarrow{HG}\right\| &= \sqrt{0^2 + 5^2} \\ \left\|\overrightarrow{HG}\right\| &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left\|\overrightarrow{HI}\right\| &= \sqrt{(x_I - x_H)^2 + (y_I - y_H)^2} \\ \left\|\overrightarrow{HI}\right\| &= \sqrt{[-6-(-1)]^2 + [-1-(-1)]^2} \\ \left\|\overrightarrow{HI}\right\| &= \sqrt{(-5)^2 + 0^2} \\ \left\|\overrightarrow{HI}\right\| &= 5 \end{aligned}$$

On obtient $\left\|\overrightarrow{HG}\right\| = 5$ et $\left\|\overrightarrow{HI}\right\| = 5$.

Question 3 : HG et HI ont la même valeur avec comme point d'origine, le point H. On en déduit que l'arc $\widehat{HG}$ est une portion du cercle de centre H et de rayon $HG = 5$.

Question 4 : La longueur du cercle se calcule par $P = 2\pi r$, donc le quart du cercle donne $\widehat{GI} = \dfrac{2\pi \times 5}{4}$, ce qui donne finalement $\widehat{GI} = \dfrac{5\pi}{2}$.

Question 5 : Le calcul des normes des vecteurs $\overrightarrow{JI}$ et $\overrightarrow{JK}$ donne :

$$\begin{aligned} \left\|\overrightarrow{JI}\right\| &= \sqrt{(x_I - x_J)^2 + (y_I - y_J)^2} \\ \left\|\overrightarrow{JI}\right\| &= \sqrt{[2-(-6)]^2 + [-1-(-1)]^2} \\ \left\|\overrightarrow{JI}\right\| &= \sqrt{8^2 + 0^2} \\ \left\|\overrightarrow{JI}\right\| &= 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left\|\overrightarrow{JK}\right\| &= \sqrt{(x_K - x_J)^2 + (y_K - y_J)^2} \\ \left\|\overrightarrow{JK}\right\| &= \sqrt{[2-2]^2 + [-9-(-1)]^2} \\ \left\|\overrightarrow{JK}\right\| &= \sqrt{0^2 + (-8)^2} \\ \left\|\overrightarrow{JK}\right\| &= 8 \end{aligned}$$

On obtient $\left\|\overrightarrow{JI}\right\| = 8$ et $\left\|\overrightarrow{JK}\right\| = 8$.

Question 3 : JI et JK ont la même valeur avec comme point d'origine, le point J. On en déduit que l'arc $\widehat{GI}$ est une portion du cercle de centre J et de rayon $JI = 8$.

Question 4 : La longueur du cercle se calcule par $P' = 2\pi R$, donc le quart du cercle donne $\widehat{IK} = \dfrac{2\pi \times 8}{4}$, ce qui donne finalement $\widehat{IK} = 4\pi$

Question 8 : Le rapport des deux longueurs successives $\widehat{IK}$ par $\widehat{GI}$ donne $\dfrac{\widehat{IK}}{\widehat{GI}} = \dfrac{\frac{5\pi}{2}}{4\pi}$, soit $\dfrac{\widehat{IK}}{\widehat{GI}} = \dfrac{5}{8}$, ce qui donne $\dfrac{\widehat{IK}}{\widehat{GI}} = 1,6$. Le rapport est approximativement bien au nombre d'or

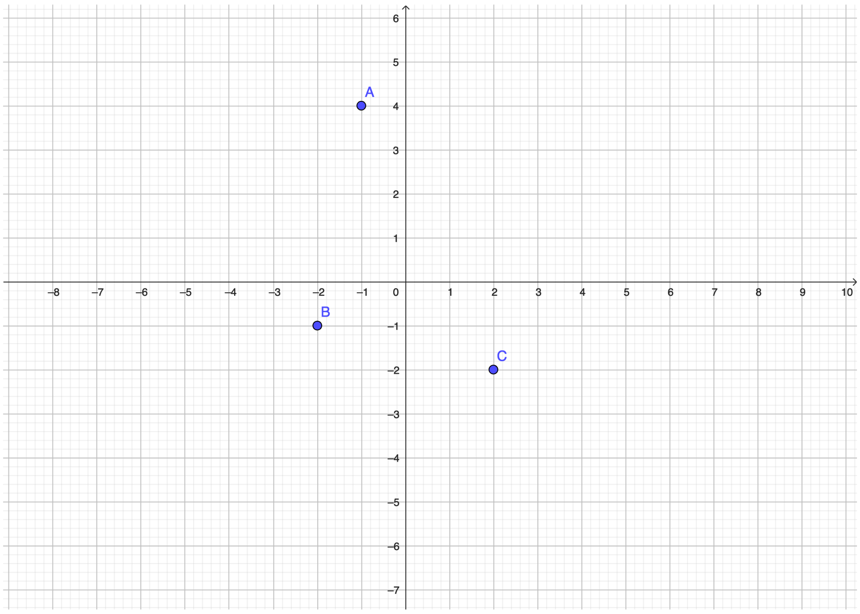
Question 9 : Pour étudier l'alignement des points G, O et K, on étudie la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{OG}$ et $\overrightarrow{OK}$. Pour cela, on calcule leurs coordonnées puis leur déterminant :
Comme $O(0;0)$ et $G(-1;4)$ alors $\overrightarrow{OG}\begin{pmatrix} x_G - x_O \\ y_G - y_O \end{pmatrix}$, ce qui donne : $\overrightarrow{OG}\begin{pmatrix} -1-0 \\ 4-0 \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{OG}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.
Comme $O(0;0)$ et $K(2;-9)$ alors $\overrightarrow{OK}\begin{pmatrix} x_K - x_O \\ y_K - y_O \end{pmatrix}$, ce qui donne : $\overrightarrow{OK}\begin{pmatrix} 2-0 \\ -9-0 \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{OK}\begin{pmatrix} 2 \\ -9 \end{pmatrix}$.
Le calcul du déterminant donne :

$$\det\left(\overrightarrow{OG};\overrightarrow{OK}\right) = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 9 \end{vmatrix}$$
$$\det\left(\overrightarrow{OG};\overrightarrow{OK}\right) = -1 \times 9 - 2 \times 4$$
$$\det\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{AF}\right) = -17$$

Le résultat n'est pas nul, les vecteurs ne sont pas colinéaires, les points ne sont pas alignés.

Exercice 3

Question 1 : Les points A, B et C dans le repère (O, x, y) donnent :



Question 2 : Pour montrer que le triangle ABC n'est pas rectangle, on utilise la contraposée du théorème de Pythagore. Pour cela, on calcule d'abord les normes de chaque vecteur :

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$
$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(-2-(-1))^2 + (-1-4)^2}$$
$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(-1)^2 + (-5)^2}$$
$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{1+25}$$
$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{26}$$

$$\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2}$$
$$\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{(2-(-1))^2 + (-2-4)^2}$$
$$\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{3^2 + (-6)^2}$$
$$\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{9+36}$$
$$\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{45}$$

$$\left\|\overrightarrow{BC}\right\| = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B}$$
$$\left\|\overrightarrow{BC}\right\| = \sqrt{[2-(-2)]^2 + [-2-(}$$
$$\left\|\overrightarrow{BC}\right\| = \sqrt{4^2 + (-1)^2}$$
$$\left\|\overrightarrow{BC}\right\| = \sqrt{16+1}$$
$$\left\|\overrightarrow{BC}\right\| = \sqrt{17}$$

On applique ensuite la contraposée du théorème de Pythagore :

On a d'une part $AC^2 = \sqrt{45}^2$

$AC^2 = 45$

et d'autre part $AB^2 + BC^2 = \sqrt{26}^2 + \sqrt{17}^2$

$AB^2 + BC^2 = 26 + 17$

$AB^2 + BC^2 = 43$

On remarque que $AC^2 \neq AB^2 + BC^2$ alors d'après la contraposée du théorème de Pythagore, le triangle ABC n'est pas rectangle.

Question 3 : Pour calculer x_D et y_D de façon à ce que le quadrilatère $ADCB$ soit un parallélogramme, il faut que, par exemple, les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{CD}$ soient égaux.

Comme $B(-2;-1)$ et $A(-1;4)$ alors $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix} x_A - x_B \\ y_A - y_B \end{pmatrix}$, ce qui donne : $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix} -1-(-2) \\ 4-(-1) \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Comme $C(2;-2)$ et $D(x_D;y_D)$ alors $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} x_D - x_C \\ y_D - y_C \end{pmatrix}$, ce qui donne : $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} x_D - 2 \\ y_D-(-2) \end{pmatrix}$.

Les deux vecteurs devant être égaux, leurs coordonnées le sont aussi. On a alors : $\begin{cases} x_D - 2 &= 1 \\ y_D + 2 &= 5 \end{cases}$

Ce qui donne : $\begin{cases} x_D &= 1+2 \\ y_D &= 5-2 \end{cases}$ et finalement $\begin{cases} x_D &= 3 \\ y_D &= 3 \end{cases}$. Les coordonnées du points D sont $D(3;3)$.

Exercice 4

Question 1 : Pour déterminer la nature du triangle ABC, on calcule les normes des vecteurs :

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2} \quad \left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2} \quad \left\|\overrightarrow{BC}\right\| = \sqrt{(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2}$$

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(4-1)^2+(-2-2)^2} \quad \left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{(7-1)^2+(2-2)^2} \quad \left\|\overrightarrow{BC}\right\| = \sqrt{(7-4)^2+(2-(-2))^2}$$

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{3^2+(-4)^2} \quad \left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{6^2+0^2} \quad \left\|\overrightarrow{BC}\right\| = \sqrt{3^2+4^2}$$

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{9+16} \quad \left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{36} \quad \left\|\overrightarrow{BC}\right\| = \sqrt{9+16}$$

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{25} \quad \left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{36} \quad \left\|\overrightarrow{BC}\right\| = \sqrt{25}$$

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = 5 \quad \left\|\overrightarrow{AC}\right\| = 6 \quad \left\|\overrightarrow{BC}\right\| = 5$$

Comme $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \left\|\overrightarrow{BC}\right\|$, alors le triangle ABC est isocèle.

Question 2 : Le calcul des coordonnées des point I, J et K, milieux respectifs des segments $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$ donne :

$$I\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right) \quad J\left(\frac{x_A+x_C}{2};\frac{y_A+y_C}{2}\right) \quad K\left(\frac{x_B+x_C}{2};\frac{y_B+y_C}{2}\right)$$

$$I\left(\frac{1+4}{2};\frac{2-2}{2}\right) \quad J\left(\frac{1+7}{2};\frac{2+2}{2}\right) \quad K\left(\frac{4+7}{2};\frac{-2+2}{2}\right)$$

$$I\left(\frac{5}{2};0\right) \quad J(4;2) \quad K\left(\frac{11}{2};0\right)$$

Question 3 : Le nom donné au point D est le centre du cercle circonscrit au triangle. Les trois droites correspondent aux médiatrices des trois côtés du triangle.