MATHEMATIQUES - 2nde Année Scolaire 2022-2023

Evaluation n°11 - *Correction* Jeudi 30 mars 2023

Exercice 1

Question 1 : Un pentagone régulier est un polygone avec cinq angles égaux, ou bien cinq côtés de même longueurs.

Question 2 : Le calcul de $\left\|\overrightarrow{BA}\right\|$ s'effectue par :

$$\left\|\overrightarrow{BA}\right\| = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$
$$\left\|\overrightarrow{BA}\right\| = \sqrt{[-1-(-7)]^2 + (5-4)^2}$$
$$\left\|\overrightarrow{BA}\right\| = \sqrt{6^2 + 1^2}$$
$$\left\|\overrightarrow{BA}\right\| = \sqrt{37}$$

La norme du vecteur $\overrightarrow{BA}$ est de $\sqrt{37}$ et par conséquent, $d = \sqrt{37}$.

Question 3 : Le pentagone est régulier. Donc $BA = AE = EF$. Comme $AE = EF$ alors le triangle AEF est isocèle.

Question 4 : Le calcul de $\left\|\overrightarrow{AF}\right\|$ s'effectue par :

$$\left\|\overrightarrow{AF}\right\| = \sqrt{(x_F - x_A)^2 + (y_F - y_A)^2}$$
$$\left\|\overrightarrow{BA}\right\| = \sqrt{[-2{,}46-(-1)]^2 + (-4{,}73-5)^2}$$
$$\left\|\overrightarrow{BA}\right\| = \sqrt{(-1{,}46)^2 + (-9{,}73)^2}$$
$$\left\|\overrightarrow{BA}\right\| \simeq 9,80$$

La norme du vecteur $\overrightarrow{BA}$ est d'environ 9,80 et par conséquent, $D \simeq 9,80$.

Question 5 : Pour montrer que le pentagone, et donc les fleurs citées, sont formés à partir du nombre d'or, on calcule le rapport $\dfrac{D}{d}$:

$$\frac{D}{d} = \frac{9,80}{\sqrt{37}}$$
$$\frac{D}{d} \simeq 1,618$$

La proportion s'approche de ϕ. On peut considérer que les fleurs sont conçues avec la proportion du nombre d'or.

Question 6 : Pour vérifier si les droites (BC) et (AF) sont parallèles, on vérifie la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AF}$. Et pour cela, on calcule leur déterminant. Il nous faut ainsi les coordonnées de chaque vecteur :

Comme $B\left(-7;4\right)$ et $C\left(-7,9;-2,02\right)$ alors $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} x_C - x_B \\ y_C - y_B \end{pmatrix}$, ce qui donne : $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -7,9-(-7) \\ -2,02-4 \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -0,9 \\ -6,02 \end{pmatrix}$.

Comme $A\left(-1;5\right)$ et $F\left(-2,46;-4,73\right)$ alors $\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix} x_F - x_A \\ y_F - y_A \end{pmatrix}$, ce qui donne : $\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix} -2,46-(-1) \\ -4,73-5 \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix} -1,46 \\ -9,73 \end{pmatrix}$.

Le déterminant de $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AF}$ devient donc :

$$\begin{aligned} \det\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{AF}\right) &= \begin{vmatrix} -0,9 & -6,02 \\ -1,46 & -9,73 \end{vmatrix} \\ \det\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{AF}\right) &= -0,9\times(-9,73)-(-6,02)\times(-1,46) \\ \det\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{AF}\right) &\simeq 0 \end{aligned}$$

En toute rigueur, le résultat n'est pas exactement nul.
On pourrait affirmer que comme $\det\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{AF}\right)\neq 0$ alors les vecteurs ne sont pas colinéaires : les droites ne sont pas parallèles.
En revanche, les valeurs des coordonnées étant cependant approximatives, on pourrait s'attendre à ce que $\det\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{AF}\right)=0$. Ce qui impliquerait alors que les vecteurs soient colinéaires et dans ce cas, les droites sont parallèles, ce qui est en réalité le cas dans un pentagone régulier.

Exercice 2

Question 1 : Un repère orthonormé est un ensemble de deux axes, (xx') et $((yy')$, gradués avec la même unité ($OI = OJ = 1$ unité), perpendiculaires et ayant la même origine O.

Question 2 : Le calcul des normes des vecteurs $\overrightarrow{SP_1}$ et $\overrightarrow{SP_2}$ donne :

$$\left\|\overrightarrow{SP_1}\right\| = \sqrt{(x_{P_1} - x_S)^2 + (y_{P_1} - y_S)^2}$$
$$\left\|\overrightarrow{SP_1}\right\| = \sqrt{[5 - (-3)]^2 + (-1 - 0)^2}$$
$$\left\|\overrightarrow{SP_1}\right\| = \sqrt{8^2 + 1^2}$$
$$\left\|\overrightarrow{SP_1}\right\| = \sqrt{65}$$

$$\left\|\overrightarrow{SP_2}\right\| = \sqrt{(x_{P_2} - x_S)^2 + (y_{P_2} - y_S)^2}$$
$$\left\|\overrightarrow{SP_2}\right\| = \sqrt{[5 - (-3)]^2 + (1 - 0)^2}$$
$$\left\|\overrightarrow{SP_2}\right\| = \sqrt{8^2 + 1^2}$$
$$\left\|\overrightarrow{SP_2}\right\| = \sqrt{65}$$

On obtient $\left\|\overrightarrow{SP_1}\right\| = \sqrt{65}$ et $\left\|\overrightarrow{SP_2}\right\| = \sqrt{65}$.

Question 3 : Comme $SP_1 = SP_2$ alors le triangle SP_1P_2 est isocèle.

Question 4 : Graphiquement les coordonnées du point H sont $H\,(5;0)$.

Question 5 : La longueur SH se calcule par :

$$\left\|\overrightarrow{SH}\right\| = \sqrt{(x_H - x_S)^2 + (y_H - y_S)^2}$$
$$\left\|\overrightarrow{SH}\right\| = \sqrt{[5 - (-3)]^2 + (0 - 0)^2}$$
$$\left\|\overrightarrow{SH}\right\| = \sqrt{(8)^2}$$
$$\left\|\overrightarrow{SH}\right\| = 8$$

La longueur SH est bien de 8.

Question 6 : Le calcul de $\left\|\overrightarrow{P_1P_2}\right\|$ donne :

$$\left\|\overrightarrow{P_1P_2}\right\| = \sqrt{(x_{P_2} - x_{P1})^2 + (y_{P_2} - y_{P_1})^2}$$
$$\left\|\overrightarrow{P_1P_2}\right\| = \sqrt{(5 - 5)^2 + [1 - (-1)]^2}$$
$$\left\|\overrightarrow{P_1P_2}\right\| = \sqrt{0^2 + 2^2}$$
$$\left\|\overrightarrow{P_1P_2}\right\| = 2$$

On obtient $P_1P_2 = 2$.

Question 7 : L'aire B se calcule par :

$$\begin{aligned}
B &= \frac{P_1P_2 \times SH}{2}\\
B &= \frac{2 \times 8}{2}\\
B &= 8
\end{aligned}$$

L'aire B donne $B = 2$.

Question 8 : Les deux aires A et B semblent équivalentes compte tenu des approximations faites. On peut ainsi valider avec cet exemple la deuxième loi de Kepler.

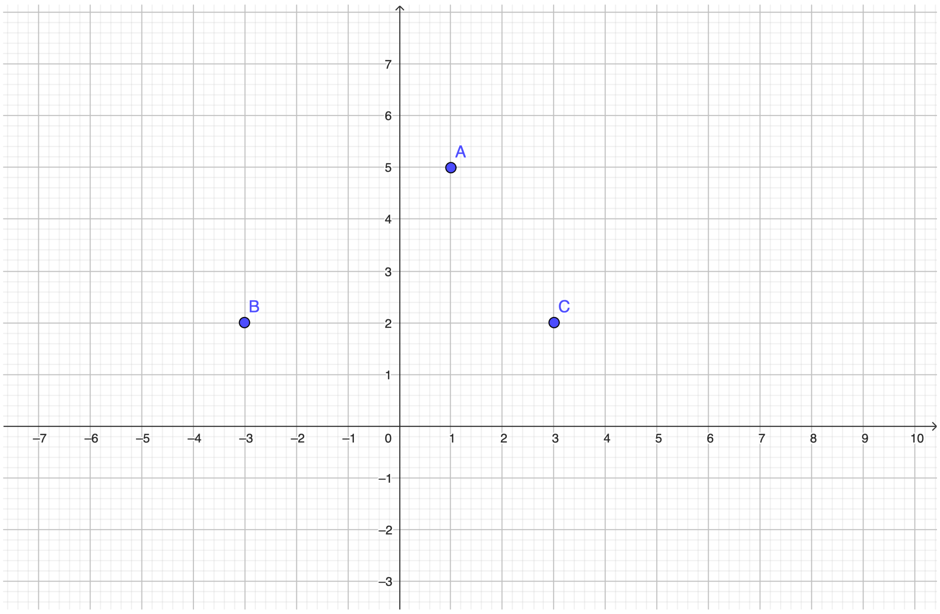
Question 9 : Si l'équation de l'ellipse : $\frac{28200}{100}x^2 + \frac{42422}{100}y^2 = \frac{742977}{100}$ alors les coordonnées du point P vérifient cette équation :

$$\begin{aligned}
\frac{28022}{100}x_P^2 + \frac{42422}{100}y_P^2 &= \frac{742977}{100}\\
\frac{42422}{100}y_P^2 &= \frac{742977}{100} - \frac{28022}{100}x_P^2\\
y_P^2 &= \frac{100}{42422}\left(\frac{742977}{100} - \frac{28022}{100}x_P^2\right)\\
y_P &= \sqrt{\frac{100}{42422}\left(\frac{742977}{100} - \frac{28022}{100}x_P^2\right)}\\
y_P &= \sqrt{\frac{100}{42422}\left(\frac{742977}{100} - \frac{28022}{100} \times (-4)^2\right)}\\
y_P &\simeq 2,64
\end{aligned}$$

On obtient une valeur de $y_P \simeq 2,64$.

Exercice 3

Question 1 : Les points A, B et C dans le repère (O,x,y) donnent :



Question 2 : Pour montrer que le triangle ABC n'est pas rectangle, on utilise la contraposée du théorème de Pythagore. Pour cela, on calcule d'abord les normes de chaque vecteur :

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$
$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(-3-1)^2 + (2-5)^2}$$
$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2}$$
$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{16+9}$$
$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{25}$$
$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = 5$$

$$\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2}$$
$$\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{(3-1)^2 + (2-5)^2}$$
$$\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{2^2 + (-3)^2}$$
$$\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{4+9}$$
$$\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{13}$$

$$\left\|\overrightarrow{BC}\right\| = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}$$
$$\left\|\overrightarrow{BC}\right\| = \sqrt{[3-(-3)]^2 + (2-2)^2}$$
$$\left\|\overrightarrow{BC}\right\| = \sqrt{6^2 + 0^2}$$
$$\left\|\overrightarrow{BC}\right\| = \sqrt{36}$$
$$\left\|\overrightarrow{BC}\right\| = 6$$

On applique ensuite la contraposée du théorème de Pythagore :

On a d'une part $BC^2 = 6^2$

$$BC^2 = 36$$

et d'autre part $AB^2 + AC^2 = 5^2 + \sqrt{13}^2$

$$AB^2 + AC^2 = 25 + 13$$
$$AB^2 + AC^2 = 38$$

On remarque que $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$ alors d'après la contraposée du théorème de Pythagore, le triangle ABC n'est pas rectangle.

Question 2 : Pour calculer x_D et y_D de façon à ce que le quadrilatère $ADCB$ soit un parallélogramme, il faut que, par exemple, les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{CD}$ soient égaux.

Comme $B(-3;2)$ et $A(1;5)$ alors $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix} x_A - x_B \\ y_A - y_B \end{pmatrix}$, ce qui donne : $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix} 1-(-3) \\ 5-2 \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Comme $C(3;2)$ et $D(x_D;y_D)$ alors $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} x_D - x_C \\ y_D - y_C \end{pmatrix}$, ce qui donne : $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} x_D - 3 \\ y_D - 2 \end{pmatrix}$.

Les deux vecteurs devant être égaux, leurs coordonnées le sont aussi. On a alors : $\begin{cases} x_D - 3 &= 4 \\ y_D - 2 &= 3 \end{cases}$

Ce qui donne : $\begin{cases} x_D &= 4+3 \\ y_D &= 3+2 \end{cases}$ et finalement $\begin{cases} x_D &= 7 \\ y_D &= 5 \end{cases}$. Les coordonnées du points D sont $D(7;5)$.

Exercice 4

Question 1 : Les coordonnées du point I, milieu de $[BD]$, se calculent par $I\left(\frac{x_B+x_D}{2};\frac{y_B+y_D}{2}\right)$.
Comme $B(-3;4)$ et $D(3;-4)$ alors $I\left(\frac{-3+3}{2};\frac{4-4}{2}\right)$, ce qui donne $I(0;0)$.

Question 2 : Les coordonnées du point J, milieu de $[EC]$, se calculent par $J\left(\frac{x_E+x_C}{2};\frac{y_E+y_C}{2}\right)$.
Comme $E(3;4)$ et $C(-3;-4)$ alors $J\left(\frac{3-3}{2};\frac{4-4}{2}\right)$, ce qui donne $J(0;0)$.

Question 3 : On remarque que les points O, I et J ont les mêmes coordonnées. On en déduit qu'ils sont confondus.

Question 4 : D'après les questions précédentes, les diagonales du quadrilatère $BEDC$ se coupent en leur milieu. On peut donc en déduire que le quadrilatère $BEDC$ est un parallélogramme.

Question 5 : Pour montrer que le quadrilatère $BEDC$ est un rectangle, on peut par exemple montrer que les diagonales du quadrilatère ont la même longueur. Leurs calculs donnent :

$$\begin{aligned}
\left\|\overrightarrow{BD}\right\| &= \sqrt{(x_D-x_B)^2+(y_D-y_B)^2} & \left\|\overrightarrow{EC}\right\| &= \sqrt{(x_C-x_E)^2+(y_C-y_E)^2} \\
\left\|\overrightarrow{BD}\right\| &= \sqrt{[3-(-3)]^2+(-4-4)^2} & \left\|\overrightarrow{EC}\right\| &= \sqrt{(-3-3)^2+(-4-4)^2} \\
\left\|\overrightarrow{BD}\right\| &= \sqrt{6^2+(-8)^2} & \left\|\overrightarrow{EC}\right\| &= \sqrt{(-6)^2+(-8)^2} \\
\left\|\overrightarrow{BD}\right\| &= \sqrt{36+64} & \left\|\overrightarrow{EC}\right\| &= \sqrt{36+64} \\
\left\|\overrightarrow{BD}\right\| &= 10 & \left\|\overrightarrow{EC}\right\| &= 10
\end{aligned}$$

On remarque que les diagonales sont égales : le quadrilatère est un rectangle.

Question 6 : Les diagonales séparent le rectangle en deux triangles rectangles dont l'hypoténuse est le diamètre du cercle (On a vu en question 3 que le milieu de la diagonale n'est autre que le centre du cercle). Par conséquent, le triangle BED est inscrit dans le cercle ou encore, le cercle est circonscrit au triangle BED