MATHEMATIQUES - 3ème Année Scolaire 2021-2022

Evaluation n°5 - *Correction* Lundi 10 janvier 2022

Exercice 1

Question 1 : D'après la figure, les triangles ABC et CDE ont deux angles égaux en commun : $\widehat{ABC} = \widehat{EDC}$ et $\widehat{BCD} = \widehat{DCE}$. Leur troisième angle sont donc aussi égaux. Ainsi, les deux triangles ayant les mêmes angles sont semblables.

Question 2 : Le sommet B correspond au sommet D ; le sommet A correspond au sommet E. Le côté homologue de $[DC]$ est $[BC]$; le côté homologue de $[DE]$ est $[BA]$ et enfin le côté homologue de $[EC]$ est $[AC]$

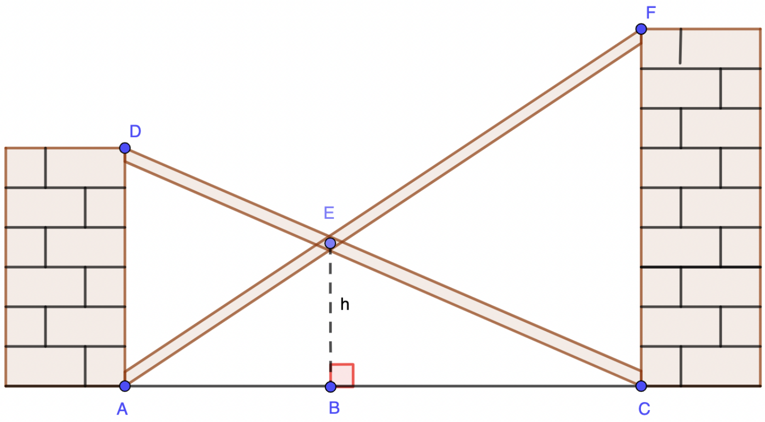
Question 3 : Les triangles étant semblables, les mesures des côtés sont donc proportionnels. Le côté homologue de $[DC]$ étant $[BC]$, alors le coefficient de proportionnalité est $k = \frac{BC}{CD}$, ce qui donne $k = \frac{4}{1,2}$, soit $k = \frac{10}{3}$. Le côté homologue de $[DE]$ étant $[BA]$, alors :

$$\begin{aligned} k &= \frac{AB}{ED} \\ ED &= \frac{AB}{k} \\ &= 6 \times \frac{3}{10} \\ &= \frac{9}{5} \end{aligned}$$

On conclue que $ED = 1,8$ cm.

Exercice 2

Question : Pour déterminer la hauteur h, posons les points A, B, C, D, E et F comme indiqués sur la figure :



Les murs sont supposés parallèles, bien que ce ne soit pas précisé dans l'énoncé. Les droites (AF) et (BC) sont sécantes en E. On peut donc utiliser le théorème de Thalès dans la configuration du triangle AFC et écrire que $\frac{AB}{AC} = \frac{h}{FC}$. On peut donc écrire que $h = 1,5 \times \frac{AB}{AC}$.
De la même façon, on utilise le théorème de Thalès dans la configuration du triangle CDA pour écrire que $\frac{CB}{CA} = \frac{h}{DA}$. On peut donc écrire que $h = \frac{AC - AB}{AC}$.
D'après la première égalité trouvée, on peut écrire que $AB = \frac{h \times AC}{1,5}$. Avec la deuxième égalité, on arrive alors à $h = \frac{AC - AB}{AC}$. On remplace par l'expression précédente de AB pour obtenir :

$$\begin{aligned}
h &= \frac{AC - AB}{AC} \\
&= \frac{AC - \frac{h \times AC}{1,5}}{AC} \\
&= \frac{\frac{1,5 \times AC - h \times AC}{1,5}}{AC} \\
&= \frac{1,5 \times AC - h \times AC}{AC \times 1,5} \\
&= \frac{\cancel{AC}(1,5 - h)}{\cancel{AC} \times 1,5}
\end{aligned}$$

On arrive à l'égalité $h = \frac{1,5 - h}{1,5}$. Cela peut s'écrire $1,5h = 1,5 - h$ donc $2,5h = 1,5$. On arrive finalement à $h = \frac{1,5}{2,5}$ soit $h = 0,6$. On en conclue que la hauteur est de 60 cm.

Exercice 3

Les trois astres seront alignés dans un certain nombre d'années. Ce nombre d'années correspond au nombre de tour qu'effectuera la Terre autour du Soleil. Comme un tour correspond à 365 jours, le nombre de jours nécessaires est donc un multiple de 365 jours.

De la même façon, le nombre de jours que doit mettre Venus pour faire le tour du Soleil est de 225. Le nombre de jours nécessaires est donc aussi un multiple de 225 jours.

Ainsi, il apparaît que ce multiple doit être commun à 365 et à 225 pour que l'on retrouve l'alignement des trois astres. Il existe différentes façons de trouver ce multiple. Il existe une formule qui permet de calculer ce qu'on appelait autrefois le Plus Petit Commun Multiple mais cette pratique n'est pas au programme.

On peut alors chercher ce multiple « à la main »mais cela risque d'être long. Pour palier à cela, il existe l'outil informatique. Il est alors possible soit d'utiliser un tableur, soit d'utiliser un algorithme.

Avec un tableur, on obtient :

Multiples de 365	**Multiples de 225**
$365 \times 2 = 730$	$225 \times 2 = 450$
$365 \times 3 = 1095$	$225 \times 3 = 675$
$365 \times 4 = 1460$	$225 \times 4 = 900$
$365 \times 5 = 1825$	$225 \times 5 = 1125$
...	...
$365 \times 45 = 16425$	$225 \times 45 = 10125$
...	...
$365 \times 73 = 26645$	$225 \times 73 = 16425$

On s'aperçoit que ce multiple commun, le plus petit, est atteint pour la Terre au bout de 45 tours, soit 45 ans, ce qu'il fallait démontrer.

Question 2 : Dans cette situation et d'après le tableau ci-dessus, le multiple est atteint par Vénus pour 73 tours.

Exercice 4

Question 1 : Si l'engrenage de 30 dents fait un tour complet, il va imposer 30 fois le mouvement d'une dent. Comme l'engrenage a proximité en possède 10, alors celui-ci va bouger l'équivalent de 30 dents. En possédant 10, il va donc bouger de $\frac{30}{10} = 3$ tours.
L'engrenage de 10 dents faisant 3 tours, il va bouger de $3 \times 10 = 30$ dents. Le petit engrenage de 5 va donc bouger de 30 dents. N'en possédant que 5, il va donc bouger de $\frac{30}{5} = 6$ tours.

Question 2 : Les 6 tours de petit engrenage impose $6 \times 5 = 30$ mouvements d'une dent à l'engrenage de 90, c'est à dire le tiers. L'aiguille s'arrêtera alors sur $\frac{12}{3} = 4$ ou sur le 8 selon le sens de rotation. Comme au départ, la première roue tourne dans le sens horaire, alors l'aiguille du dernier engrenage se positionnera sur le nombre 8.

Exercice 5

Question 1 : Les arbres sont régulièrement espacés. Cela signifie que la distance séparant chaque arbre est la même quelque soit le côté du triangle. On veut ensuite que la quantité d'arbres soit minimal. Ainsi, cet espacement doit donc être maximal. Le problème revient donc à chercher le plus grand diviseur entre les trois distances du terrain. Pour cela, on décompose chaque nombre en diviseurs premiers :

$$518 = 2 \times 259$$
$$518 = 2 \times 7 \times 37$$

$$448 = 2 \times 224$$
$$448 = 2 \times 2 \times 112$$
$$448 = 2 \times 2 \times 2 \times 56$$
$$448 = 2 \times 2 \times 2 \times 7 \times 8$$
$$448 = 2 \times 2 \times 2 \times 7 \times 2^3$$

$$350 = 35 \times 10$$
$$350 = 35 \times 2 \times 5$$
$$350 = 5 \times 7 \times 2 \times 5$$

On remarque que le plus grand diviseur commun s'obtient par $2 \times 7 = 14$. Il faudra donc des espacements de 14 mètres entre chaque arbre.
Ainsi, pour le côté de 518m, il y aura des espacements de 14m, soit $\frac{518}{14} = 37$ espacements. On place 1 arbre à la première et 36 autres pour remplir le côté. L'autre extrémité n'est pas encore pourvu d'arbres.
Pour le côté de 448m, il y aura des espacements de 14m, soit $\frac{448}{14} = 32$ espacements. On place 1 arbre à la première et 31 autres pour remplir le côté. L'autre extrémité n'est pas encore pourvu d'arbres.
Pour le côté de 350m, il y aura des espacements de 14m, soit $\frac{350}{14} = 25$ espacements. On place 1 arbre à la première et 24 autres pour remplir le côté. L'autre extrémité n'est pas encore pourvu d'arbres..
Il faudra $37 + 32 + 25 = 94$ arbres.

Question 2 : Avec un coût de 54 € par arbre, le coût total sera de $94 \times 54 = 5076$ €.