MATHEMATIQUES - 2nde

Année Scolaire 2021-2022

Evaluation n°8 (D.S.T. n°2)

Correction

Vendredi 1 avril 2022

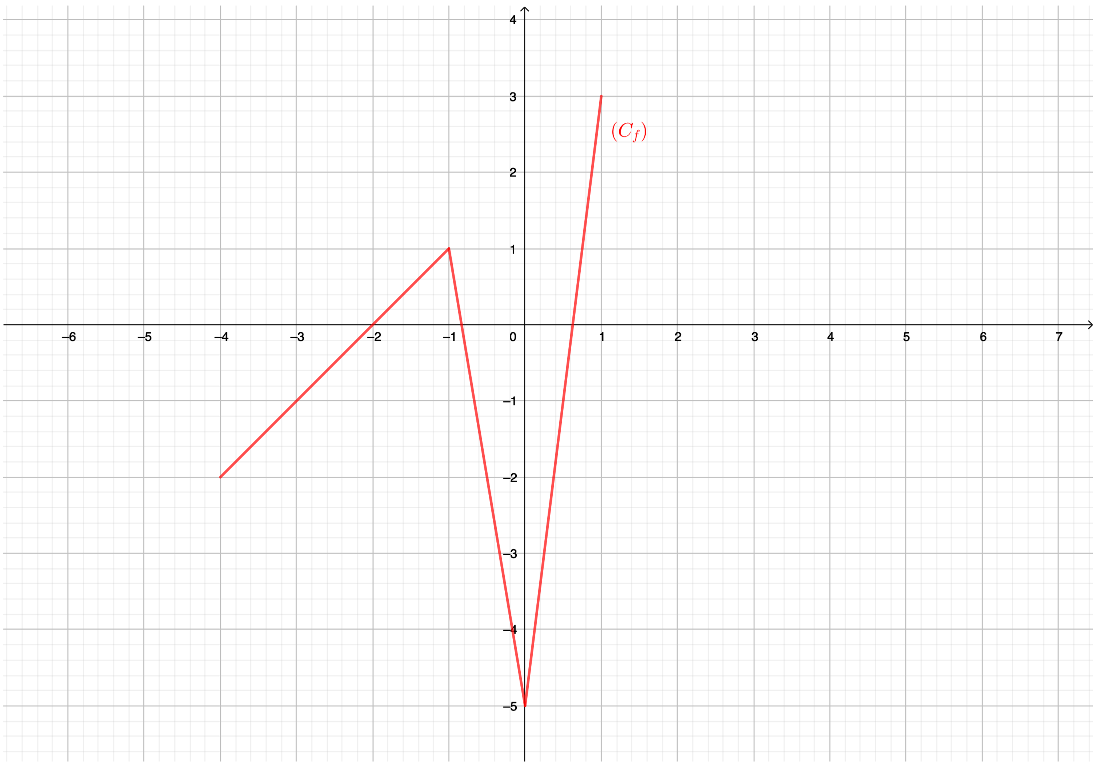
Exercice 1 *(5 points)*

Question 1 : *(0,5 point)* D'après le tableau de variations de f, l'ensemble de définition est $D_f = [-4;1]$.

Question 2a : *(1,5 point)* Sur l'intervalle $[-4;-1)$, la fonction f est croissante. Cela signifie que pour tout réel x_1 et x_2 de $[-4;-1)$ tels que $x_1 < x_2$, on ait $f(x_1) < f(x_2)$. Comme ici $-3 < -2$ alors on a $f(-3) < f(-2)$.

Question 2b : *(1,5 point)* Sur l'intervalle $[-1;0)$, la fonction f est décroissante. Cela signifie que pour tout réel x_1 et x_2 de $[-1;0)$ tels que $x_1 < x_2$, on ait $f(x_1) > f(x_2)$. Comme ici $-0,8 < -0,5$ alors on a $f(-0,8) > f(-0,5)$.

Question 3 : *(1,5 point)* Une courbe possible pour la fonction f peut être :



Exercice 2 *(6 points)*

Question 1a : *(2,5 points)* Résolvons l'équation $\dfrac{(x-3)^2-25}{x-8}=0$:

$$\begin{aligned}
\frac{(x-3)^2-25}{x-8} &= 0\\
(x-3)^2-25 &= 0 \text{ car un quotient est nul si son numérateur est nul et } x-8\neq 0\\
[(x-3)-5]\,[(x-3)+5] &= 0\\
(x-3-5)\,(x-3+5) &= 0\\
(x-8)\,(x+2) &= 0
\end{aligned}$$

Un produit de facteurs est nul si au moins l'un d'eux est nul.

On a d'une part :

$$\begin{aligned} x-8&=0\\ x&=8 \end{aligned}$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned} x+2&=0\\ x&=-2 \end{aligned}$$

Les solutions de l'équation sont $x=-2$ et $x=8$. Mais comme $x=-8$ est une valeur interdite, alors la solution de l'équation est finalement $x=-2$.

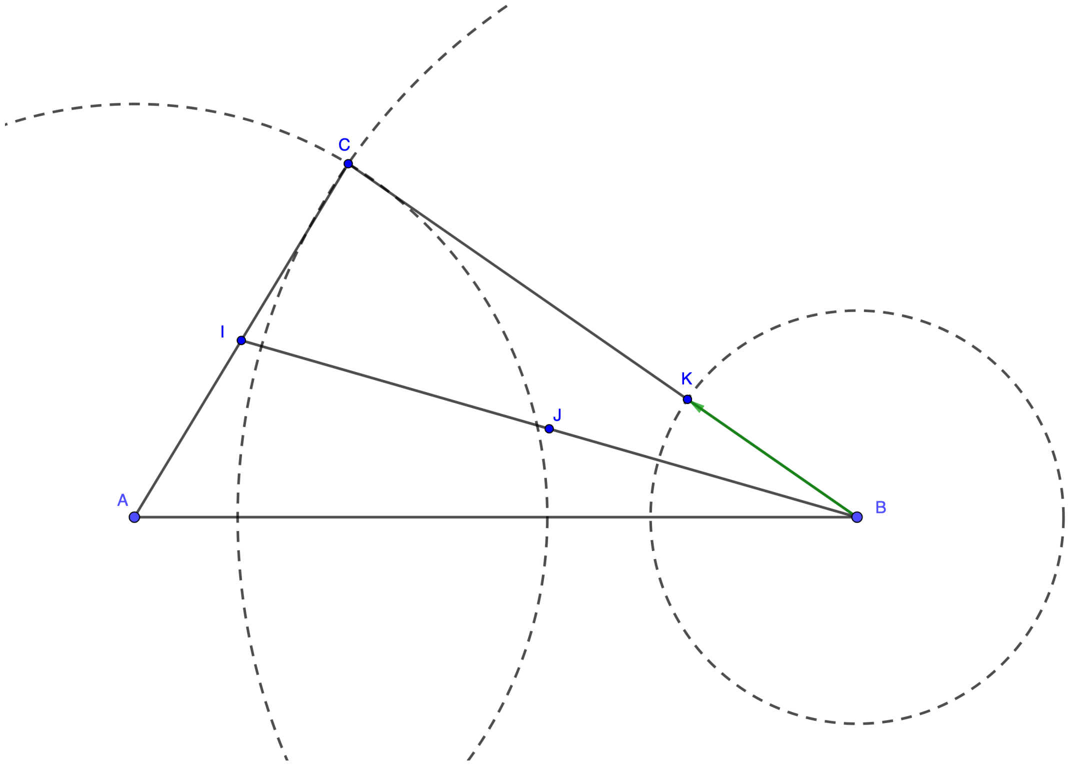
Question 1b : *(3,5 points)* Résolvons l'équation $\dfrac{2-x}{x+4}=2$:

$$\begin{aligned}
\frac{2-x}{x+4} &= 2\\
\frac{2-x}{x+4}-2 &= 0\\
\frac{2-x}{x+4}-\frac{2\,(x+4)}{x+4} &= 0\\
\frac{2-x-2\,(x+4)}{x+4} &= 0\\
\frac{2-x-2x-8}{x+4} &= 0\\
\frac{-3x-6}{x+4} &= 0\\
3x+6 &= 0 \text{ car un quotient est nul si son numérateur est nul et } x+4\neq 0\\
x &= \frac{-6}{3}\\
x &= -2
\end{aligned}$$

La solution de l'équation sont $x=-2$. On note aussi la valeur interdite $x=-4$.

Exercice 3 *(6 points)*

Question 1 : *(1 point)* La figure demandée donne :



Question 2 : *(2 points)* Montrons que $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$:

Pour cela, on utilise la relation de Chasles au niveau du vecteur $\overrightarrow{AJ}$:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AJ} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ} \\
&= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BI} \text{ car } J \text{ milieu de } [BI] \\
&= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AI}\right) \text{ avec la relation de Chasles} \\
&= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AI} \\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \text{ car } I \text{ milieu de } [AC] \\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}
\end{aligned}$$

On obtient bien $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

Question 3 : *(2 points)* Montrons que $\overrightarrow{AK}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$:
Pour cela, on utilise la relation de Chasles au niveau du vecteur $\overrightarrow{AK}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AK} &= \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BK}\\ &= \overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \text{ car } \overrightarrow{BK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}\\ &= \overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right) \text{ avec la relation de Chasles}\\ &= \overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\\ &= \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

On obtient bien $\overrightarrow{AK}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

Question 4 : *(1 point)* On sait maintenant que $\overrightarrow{AJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ et que $\overrightarrow{AK}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.
Or, on remarque que :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AK} &= \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\\ &= \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}\right)\\ &= \frac{4}{3}\overrightarrow{AJ}\end{aligned}$$

On obtient une relation du type $\overrightarrow{AK}=k\times\overrightarrow{AJ}$: les deux vecteurs $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{AJ}$ sont colinéaires. Comme de plus les deux vecteurs ont un point en commun, alors les points A, J et K sont alignés.

Exercice 4 *(4 points)*

Question 1 : *(1 point)* Pour étudier la parité de la fonction f, on vérifie d'abord que l'ensemble de définition soit centré en 0. Ce qui est le cas avec $\mathbb{R}$.
Ensuite, comme, $h(x) = -x^2 + 4x + 2$ alors

$$\begin{aligned} h(x) &= -x^2 + 4x + 2 \\ h(-x) &= -(-x)^2 + 4(-x) + 2 \\ &= -x^2 - 4x + 2 \end{aligned}$$

On remarque que $h(x) \neq h(-x)$ donc la fonction n'est pas paire sur D_f. De plus, comme $h(-x) = -x^2 - 4x + 2$ alors :

$$\begin{aligned} h(x) &= -x^2 + 4x + 2 \\ -h(-x) &= -\left[(-x)^2 + 4(-x) + 2\right] \\ &= x^2 + 4x - 2 \end{aligned}$$

On remarque aussi que $h(x) \neq -h(-x)$ donc la fonction n'est pas impaire sur D_f.
On en conclue que la fonction est ni paire, ni impaire sur D_f.

Question 2 : *(1 point)* Pour vérifier si $h(x) = -(x-2)^2 + 6$, on développe son expression :

$$\begin{aligned} h(x) &= -(x-2)^2 + 6 \\ &= -\left(x^2 - 4x + 4\right) + 6 \\ &= -x^2 + 4x - 4 + 6 \\ &= -x^2 + 4x + 2 \end{aligned}$$

On arrive bien à l'expression initiale de h donc $h(x) = -(x-2)^2 + 6$.

Question 3 : *(1 point)* L'étude du signe de $h(x) - h(2)$ s'effectue de la faÃ§on suivante :

$$\begin{aligned} h(x) - h(2) &= -(x-2)^2 + 6 - \left[-(2-2)^2 + 6\right] \\ &= -(x-2)^2 + 6 - (0+6) \\ &= -(x-2)^2 \end{aligned}$$

Comme pour tout x de $\mathbb{R}$, $x^2 > 0$ donc $(x-2)^2 > 0$ et on en déduit donc que $-(x-2)^2 < 0$.
On en conclue que $h(x) - h(2)$ est négatif sur $\mathbb{R}$.

Question 4 : *(1 point)* Comme $h(x) - h(2) < 0$ alors $h(x) < h(2)$: on en conclue que h admet un maximum $M = h(2)$ atteint en $x = 2$. Le calcule de M donne $M = 6$.

Exercice 5 *(5 points)*

Question 1 : *(2 points)*Comme le triangle AHB est rectangle en H, alors on peut utiliser la trigonométrie :

$$\cos\left(\widehat{BAH}\right) = \frac{AH}{AB} \qquad \sin\left(\widehat{BAH}\right) = \frac{HB}{AB}$$

$$\begin{aligned} AH &= AB\cos\left(\widehat{BAH}\right) \\ &= 100\cos\left(\widehat{25}\right) \\ &\simeq 90,63 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} HB &= AB\sin\left(\widehat{BAH}\right) \\ &= 100\sin\left(\widehat{25}\right) \\ &\simeq 42,26 \end{aligned}$$

Le calcul des distances donne $AB \simeq 90,63$ km et $HB \simeq 42,26$ km.

Question 2 : *(1,5 point)* La somme des trois angles dans le triangle ABT donne :

$$\begin{aligned} \widehat{BAH} + \widehat{TBA} + \widehat{BTA} &= 180 \\ \widehat{BTA} &= 180 - \widehat{BAH} - \widehat{TBA} \\ &= 180 - 25 - 115 \\ &= 40 \end{aligned}$$

Comme $\widehat{BTA} = \widehat{BTH}$, alors $\widehat{BTH} = 40°$.
Enfin, dans le triangle BHT, la somme des angles donne :

$$\begin{aligned} \widehat{BTH} + \widehat{THB} + \widehat{HBT} &= 180 \\ \widehat{HBT} &= 180 - \widehat{THB} - \widehat{BTH} \\ &= 180 - 90 - 40 \\ &= 50 \end{aligned}$$

On obtient finalement $\widehat{HBT} = 50°$.

Question 3 : *(1 point)* Le triangle HBT étant rectangle en H, on peut donc utiliser les formules de trigonométrie :

$$\begin{aligned} \tan\left(\widehat{HBT}\right) &= \frac{HT}{HB} \\ HT &= HB\tan\left(\widehat{HBT}\right) \\ &= 42,26 \times \tan(50) \\ &\simeq 50,36 \end{aligned}$$

La distance HT mesure environ 50,36 km.

Question 4 : *(0,5 point)* La distance AT se calcule par :

$$\begin{aligned} AT &= AH + HT \text{ car les points sont alignés} \\ AT &= 90,63 + 50,36 \\ &\simeq 141 \end{aligned}$$

La distance AT mesure environ 141 km.

Exercice 6 *(4 points)*

Question 1 : *(1,5 point)* Comme f est une fonction affine, alors elle s'exprime sous la forme $f(x) = mx + p$.
D'après l'énoncé, pour $x = 0$, $f(0) = 4200$. On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} f(x) &= mx + p \\ 4200 &= m \times 0 + p \\ p &= 4200 \end{aligned}$$

Ensuite, pour $x = 4,5$, on a $f(4,5) = 5010$. On peut donc écrire que :

$$\begin{aligned} f(x) &= mx + p \\ 5010 &= m \times 4,5 + 4200 \\ 4,5m &= 5010 - 4200 \\ 4,5m &= 810 \\ m &= \frac{810}{4,5} \\ &= 180 \end{aligned}$$

On en déduit l'expression de f : $f(x) = 180x + 4200$.

Question 2 : *(1 point)* La fonction f étant une fonction affine, son sens de variation dépend de son taux d'accroissement. Ici, $m = 18$. Comme ce taux est positif, alors on en déduit que la fonction f est croissante sur $[0;10]$. Son tableau de variation donne :

x	0	10
Variations de f	4200	6000

Question 3 : *(1,5 point)* Déterminer au bout de combien de temps la population de bactéries atteint 5550 individus revient à résoudre l'équation $f(x) = 5550$:

$$\begin{aligned} (x) &= 5550 \\ 180x + 4200 &= 5550 \\ 180x &= 5550 - 4200 \\ 180x &= 1350 \\ x &= \frac{1350}{180} \\ &= \frac{135}{18} \\ &= \frac{15}{2} \end{aligned}$$

La population atteindra 5550 individus pour un temps de 7,5h soit 7h30.