MATHEMATIQUES - 2nde Année Scolaire 2021-2022

Evaluation n°7 *(Correction)* Jeudi 31 mars 2022

Exercice 1

Question 1 : La fonction f est écrite sous forme fractionnaire dans laquelle le dénominateur ne doit pas être nul. Par conséquent, on résout l'inéquation $(-2x+3)^2 \neq 0$:

$$\begin{aligned}(-2x+3)^2 &\neq 0\\ -2x+3 &\neq 0\\ x &\neq \frac{3}{2}\end{aligned}$$

L'ensemble de définition de f est donc l'ensemble des réels privé de l'élément $\frac{3}{2}$. Ce qui peut s'écrire par $D_f = \left]-\infty;\frac{3}{2}\right[\cup \left]\frac{3}{2};+\infty\right[$.

Question 2 : Pour étudier les variations de f sur $\left]-\infty;\frac{3}{2}\right[$, on considère deux nombres a et b de $\left]-\infty;\frac{3}{2}\right[$ tels que $a<b$. On a alors :

$$\begin{aligned}a &< b\\ -2a &> -2b\\ -2a+3 &> -2b+3\\ (-2a+3)^2 &> (-2b+3)^2 \text{ car } -2x+3>0\\ \frac{1}{(-2a+3)^2} &< \frac{1}{(-2b+3)^2}\\ f(a) &< f(b)\end{aligned}$$

On remarque que $f(a) < f(b)$ avec $a<b$ sur $\left]-\infty;\frac{3}{2}\right[$. On en déduit que f est croissante sur $\left]-\infty;\frac{3}{2}\right[$.

Question 3 : Pour étudier les variations de f sur $\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$, on considère deux nombres a et b de $\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$ tels que $a<b$. On a alors :

$$\begin{aligned}
a &< b \\
-2a &> -2b \\
-2a+3 &> -2b+3 \\
(-2a+3)^2 &< (-2b+3)^2 \text{ car } -2x+3<0 \\
\frac{1}{(-2a+3)^2} &> \frac{1}{(-2b+3)^2} \\
f(a) &> f(b)
\end{aligned}$$

On remarque que $f(a)>f(b)$ avec $a<b$ sur $\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$. On en déduit que f est décroissante sur $\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$.

Question 4 : Le tableau de variations de f sur D_f donne :

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
Variations de f		$\nearrow$	$\Vert$	$\searrow$	

Question 5 : L'ensemble de définition de f est $D_f=\left]-\infty;\frac{3}{2}\right[\cup\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$. Il n'est pas centré en 0. La fonction ne peut donc être paire ou impaire.

Exercice 2

Question 1 : Les deux fonctions f et g s'écrivent sous la forme $y = mx + p$. Ce sont des fonctions affines. Leurs variations dépendent de leurs taux d'accroissement qui sont respectivement $\frac{3}{4}$ et -1. Le premier est positif et le deusième est négatif. Par conséquent, la fonction f est croissante sur son ensemble de définition et la fonction g est décroissante sur son ensemble de définition. Les tableaux de variations des fonctions f et h donnent donc :

x	$-\infty$	$+\infty$
Variations de f	$\nearrow$	

x	$-\infty$	$+\infty$
Variations de g	$\searrow$	

Question 2 : La résolution algébrique de l'équation $f(x) = h(x)$ donne :

$$\begin{aligned} f(x) &= h(x) \\ \frac{3}{4}x + 2 &= -x + 5 \\ \frac{3}{4}x + x &= -2 + 5 \\ \frac{7}{4}x &= 3 \\ x &= \frac{12}{7} \end{aligned}$$

La solution de l'équation est $x = \frac{12}{7}$.

Question 3 : Etudions la parité de h sur son ensemble de définition. Celui-ci est contré en 0.

Comme $h(x) = \sqrt{\frac{1}{2x^2}}$ alors :

$$\begin{aligned} h(x) &= \sqrt{\frac{1}{2x^2}} \\ h(-x) &= \sqrt{\frac{1}{2(-x)^2}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2x^2}} \end{aligned}$$

On remarque que $h(x) = h(-x)$ pour tout x de D_h, on en déduit que h est paire.

Question 4 : Le tableau de variations de h sur son ensemble de définition donne :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variations de h	$\nearrow$	$\Vert$	$\searrow$

Exercice 3

Question 1 : *Erreur d'énoncé*

Question 2 : D'après l'allure de la courbe C_f dans le repère, le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$ donne :

x	$-\infty$		$\frac{-1}{3}$		1		$+\infty$
Variations de f		$\searrow$	0.8	$\nearrow$	2	$\searrow$	

Question 3 : Pour la fonction g, le taux d'accroissement noté m_g est $m_g = -1$: pour un décalage d'une unité sur l'axe des x, celui sur l'axe y est de -1. Autrement, on peut aussi le calculer avec deux points $B(-2;6)$ et $C(0;4)$ par :

$$\begin{aligned} m_g &= \frac{g(x_C) - g(x_B)}{x_C - x_B} \\ &= \frac{4-6}{0-(-2)} \\ &= -1 \end{aligned}$$

De la même façon pour la fonction h, on obtient $m_h = -4$ et pour la fonction k, on obtient $m_k = \frac{1}{4}$.

Question 4 : La forme algébrique de la fonction k s'écrit $k(x) = m_k x + p_k$.
On sait déjà que $m_k = \frac{1}{4}$. Ensuite, le point d'intersection de la courbe C_k avec l'axe des ordonnées et le point de coordonnées $(0;4)$. On en déduit donc que $p_k = 4$.
On en conclut la forme algébrique de la fonction k : $k(x) = \frac{1}{4}x + 4$.