MATHEMATIQUES - 2nde — Année Scolaire 2021-2022

Evaluation n°7 — Mardi 29 mars 2022

Exercice 1

Question 1 : D'après l'allure de la courbe C_f dans le repère, le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$ donne :

x	$-\infty$		$\frac{-1}{3}$		1		$+\infty$
Variations de f		↗	$\frac{32}{27}$	↘	0	↗	

Question 2 : La courbe C_g est une droite qui ne passe pas par l'origine du repère : la fonction g est donc une fonction affine. Ensuite, la courbe C_h est une droite qui passe par l'origine du repère : la fonction h est donc une fonction linéaire. Enfin, la courbe C_k est une droite qui ne passe pas par l'origine du repère : la fonction k est donc une fonction affine.

Question 3 : Pour la fonction g, le taux d'accroissement noté m_g est $m_g = 3$: pour un décalage d'une unité sur l'axe des x, celui sur l'axe y est de 3. Autrement, on peut aussi le calculer avec deux points $B\left(-2;0\right)$ et $C\left(-1;3\right)$ par :

$$\begin{aligned} m_g &= \frac{g\left(x_C\right) - g\left(x_B\right)}{x_C - x_B} \\ &= \frac{3-0}{-1-(-2)} \\ &= 3 \end{aligned}$$

De la même façon pour la fonction h, on obtient $m_h = -2$ et pour la fonction k, on obtient $m_k = \frac{1}{2}$.

Question 4 : La forme algébrique de la fonction k s'écrit $k\left(x\right) = m_k x + p_k$.
On sait déjà que $m_k = \frac{1}{2}$. Ensuite, le point d'intersection de la courbe C_k avec l'axe des ordonnées et le point de coordonnées $\left(0;-1\right)$. On en déduit donc que $p_k = -1$.
On en conclut la forme algébrique de la fonction k : $k\left(x\right) = \frac{1}{2}x - 1$.

Exercice 2

Question 1 : La fonction f est écrite sous forme fractionnaire dans laquelle le dénominateur ne doit pas être nul. Par conséquent, on résout l'inéquation $(1-x)^2 \neq 0$:

$$\begin{aligned}(1-x)^2 &\neq 0\\ 1-x &\neq 0\\ x &\neq 1\end{aligned}$$

L'ensemble de définition de f est donc l'ensemble des réels privé de l'élément 1. Ce qui peut s'écrire par $D_f =]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$.

Question 2 : Pour étudier les variations de f sur $]-\infty;1[$, on considère deux nombres a et b de $]-\infty;1[$ tels que $a<b$. On a alors :

$$\begin{aligned}a &< b\\ -a &> -b\\ 1-a &> 1-b\\ (1-a)^2 &> (1-b)^2 \text{ car } 1-x>0\\ \frac{1}{(1-a)^2} &< \frac{1}{(1-b)^2}\\ f(a) &< f(b)\end{aligned}$$

On remarque que $f(a)<f(b)$ avec $a<b$ sur $]-\infty;1[$. On en déduit que f est croissante sur $]-\infty;1[$.

Question 3 : Pour étudier les variations de f sur $]1;+\infty[$, on considère deux nombres a et b de $]1;+\infty[$ tels que $a<b$. On a alors :

$$\begin{aligned}a &< b\\ -a &> -b\\ 1-a &> 1-b\\ (1-a)^2 &< (1-b)^2 \text{ car } 1-x<0\\ \frac{1}{(1-a)^2} &> \frac{1}{(1-b)^2}\\ f(a) &> f(b)\end{aligned}$$

On remarque que $f(a)>f(b)$ avec $a<b$ sur $]1;+\infty[$. On en déduit que f est décroissante sur $]1;+\infty[$.

Question 4 : Le tableau de variations de f sur D_f donne :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Variations de f		$\nearrow$	$\Vert$	$\searrow$	

Question 5 : L'ensemble de définition de f est $D_f = \left]-\infty; 1\right[\cup \left]1; +\infty\right[$. Il n'est pas centré en 0. La fonction ne peut donc être paire ou impaire.

Exercice 3

Question 1 : Etudions la parité de g sur son ensemble de définition. Celui-ci est contré en 0.
Comme $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3}x^2}$ alors :

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{\sqrt{3}x^2} \\ g(-x) &= \frac{1}{\sqrt{3}(-x)^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}x^2} \end{aligned}$$

On remarque que $g(x) = g(-x)$ pour tout x de D_g, on en déduit que g est paire.

Question 2 : Le tableau de variations de g sur son ensemble de définition donne :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Variations de g		$\nearrow$	$\Vert$	$\searrow$	

Question 3 : Les deux fonctions f et h s'écrivent sous la forme $y = mx + p$. Ce sont des fonctions affines. Leurs variations dépendent de leurs taux d'accroissement qui sont respectivement -2 et -3. Ils sont tous les deux négatifs. Par conséquent, les deux fonctions sont toutes les deux décroissantes sur leur intervalle de définition. Les tableaux de variations des fonctions f et h donnent donc :

x	$-\infty$	$+\infty$
Variations de f	$\searrow$	

x	$-\infty$	$+\infty$
Variations de h	$\searrow$	

Question 4 : La résolution algébrique de l'équation $f(x) = h(x)$ donne :

$$\begin{aligned} f(x) &= h(x) \\ -2x+1 &= -3x+2 \\ -2x+3x &= -1+2 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

La solution de l'équation est $x = 1$.