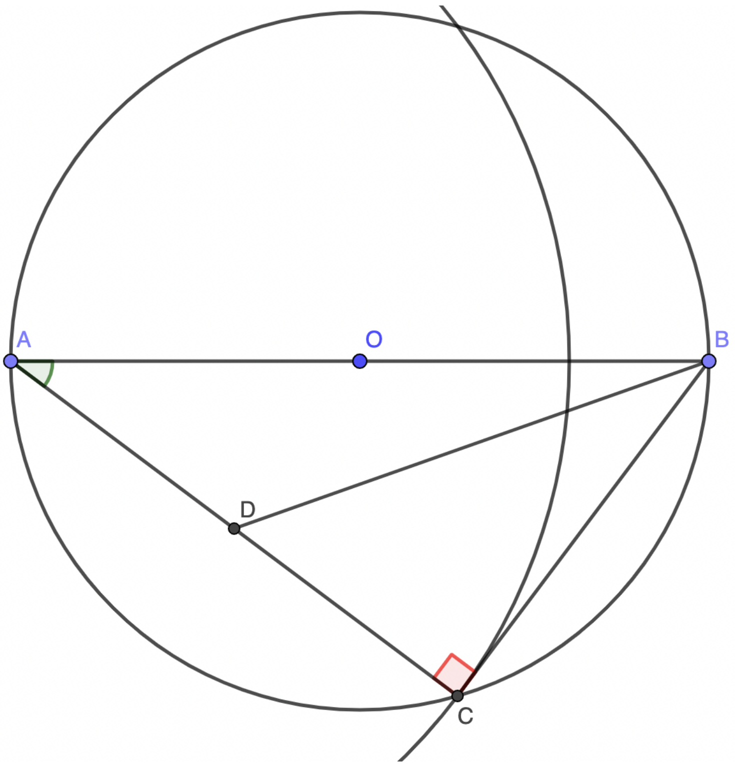
MATHEMATIQUES - 2$^{\text{nde}}$ Année Scolaire 2021-2022

Evaluation n°5 (remplacement) - *Correction* Mardi 18 janvier 2022

Exercice 1

Question 1 : La figure comprenant les cinq points donne :



Question 2 : La droite (OD) passe par le milieu d'un des côtés du triangle puisque le point D est le point d'intersection avec la médiane et ce côté.
De plus, cette droite passe par le centre O du cercle. C'est un cercle circonscrit au triangle. Son centre est donc le point d'intersection des trois médiatrices du triangle.
Ces trois médiatrices passent par le milieu respectif de chaque côté. On en déduit avec les précisions précédentes que la droite (OD) est la médiatrice du segment $[BC]$.

Question 3 : Pour calculer BD, on utilise une des relations s'Al-Kaschi dans le triangle ABD :

$$\begin{aligned}
BD^2 &= AD^2 + AB^2 - 2AD \times AB \times \cos\left(\widehat{DAB}\right) \\
BD &= \sqrt{AD^2 + AB^2 - 2AD \times AB \times \cos\left(\widehat{DAB}\right)} \\
&= \sqrt{\left(\frac{AC}{2}\right)^2 + AB^2 - 2 \times \frac{AC}{2} \times AB \times \cos\left(\widehat{DAB}\right)} \\
&= \sqrt{\left(\frac{8}{2}\right)^2 + 10^2 - 2 \times \frac{8}{2} \times 10 \times \cos(36,87)} \\
&= \sqrt{16 + 100 - 80 \times \cos(36,87)} \\
&\simeq 7,2
\end{aligned}$$

La longueur BD est d'environ 7,2 cm.

Exercice 2

On considère un angle noté α tel que $\cos(\alpha) = \frac{-1}{2}$.

Question 1 : Pour déterminer la valeur exacte de $\sin(\alpha)$, on utilise la relation fondamentale de la trigonométrie :

$$\begin{aligned}
\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) &= 1 \\
\sin^2(\alpha) &= 1 - \cos^2(\alpha) \\
\sin(\alpha) &= \sqrt{1 - \cos^2(\alpha)} \\
\sin(\alpha) &= \sqrt{1 - \left(\frac{-1}{2}\right)^2} \\
\sin(\alpha) &= \sqrt{1 - \frac{1}{4}} \\
\sin(\alpha) &= \sqrt{\frac{4-1}{4}} \\
\sin(\alpha) &= \sqrt{\frac{3}{4}} \\
\sin(\alpha) &= \frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

La valeur exacte de $\sin(\alpha)$ est $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Question 2 : Comme $\cos(\alpha) = \frac{-1}{2}$ et $\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, alors à la calculatrice, on obtient aisément que $\alpha = 120°$.

Exercice 3

Question 1 : Le cercle est inscrit au triangle. Par conséquent, le côté $[AB]$ est tangent au cercle. Le côté $[AB]$ est donc perpendiculaire à $[DE]$.
De plus, le triangle étant rectangle-isocèle, la médiatrice, la bissectrice, la médiane et la hauteur issue de C sont toutes confondues. La droite (CD) fait donc office de médiatrice de $[CD]$.
Par conséquent, les points E, D et C sont alignés et la droite (CE) est donc la hauteur de $[AB]$.

Question 2 : Comme$[CE]$ est une hauteur, alors le triangle ACE est rectangle en E. On peut donc utiliser le théorème de Pythagore dans ce triangle :

$$\begin{aligned} AC^2 &= AE^2 + CE^2 \\ CE^2 &= AC^2 - AE^2 \\ CE &= \sqrt{AC^2 - AE^2} \end{aligned}$$

De plus, on a vu que (CE) jouait le rôle aussi bien d'une hauteur qu'une médiatrice, donc E est le milieu de $[CE]$. On a donc $AE = \frac{AB}{2}$.
Aussi, le triangle ACB étant rectangle-isocèle en C, on peut utiliser le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} AB^2 &= AC^2 + CB^2 \\ AB &= \sqrt{2AC^2} \\ &= AC\sqrt{2} \end{aligned}$$

En réunissant les informations, on arrive à :

$$\begin{aligned} CE &= \sqrt{AC^2 - AE^2} \\ &= \sqrt{AC^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(6\sqrt{2}\right)^2 - \left(\frac{6\sqrt{2}\times\sqrt{2}}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{36\times 2 - 36} \\ &= 6 \end{aligned}$$

La longueur CE est de 6 cm.