MATHEMATIQUES - 2nde — Année Scolaire 2021-2022

Evaluation n°4 - *Correction* — Mardi 30 novembre 2021

Exercice 1

Question : La résolution de chaque équation dans $\mathbb{R}$ donne :

■ Résolvons l'équation $(7x-3)(1-5x)=0$:
Un produit de facteurs est nul si aux moins l'un d'eux est nul.

On a d'une part $7x-3=0$

$$7x=3$$

$$7x=\frac{3}{7}$$

on a d'autre part $1-5x=0$

$$-5x=-1$$

$$x=\frac{-1}{-5}$$

Les solutions de cette équation sont $x=\frac{1}{5}$ ou $\frac{3}{7}$.

■ Résolvons l'équation $\frac{7x-1}{4x+3}=-2$:

$$\begin{aligned}\frac{7x-1}{4x+3}&=-2\\ \frac{7x-1}{4x+3}+2&=0\\ \frac{7x-1}{4x+3}+\frac{2(4x+3)}{4x+3}&=0\\ \frac{7x-1+8x+6}{4x+3}&=0\\ \frac{15x+5}{4x+3}&=0\end{aligned}$$

Un quotient est nul si le numérateur est nul et si le dénominateur est non nul :

On a d'une part $15x+5=0$

$$15x=-5$$

$$x=\frac{-5}{15}$$

on a d'autre part $4x+3\neq 0$

$$4x\neq -3$$

$$x\neq\frac{-3}{4}$$

La solution de cette équation est $x=\frac{-1}{3}$ et la valeur interdite est $x=\frac{-3}{4}$.

■ Résolvons l'équation $4x^2 - 32x = -64$:

$$\begin{aligned} 4x^2 - 32x &= -64 \\ 4x^2 - 32x - 64 &= 0 \\ (2x-8)^2 &= 0 \\ 2x - -8 &= 0 \\ 2x &= 8 \\ x &= \frac{8}{2} \end{aligned}$$

La solution de cette équation est $x = 4$.

Exercice 2

On considère deux expressions littérales A et B telles que $A = \dfrac{n^3+1}{n+1}$ et $B = n^2 - n + 1$ pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$.
On souhaite comparer les deux expressions A et B.

Question 1 : Les calculs donnent :

Pour $n = 0$

$$\begin{aligned} A &= \frac{n^3+1}{n+1} \\ &= \frac{0^3+1}{0+1} \\ &= \frac{1}{1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Pour $n = 1$

$$\begin{aligned} A &= \frac{n^3+1}{n+1} \\ &= \frac{1^3+1}{1+1} \\ &= \frac{2}{2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Pour $n = 2$

$$\begin{aligned} A &= \frac{n^3+1}{n+1} \\ &= \frac{2^3+1}{2+1} \\ &= \frac{9}{3} \\ &= 3 \end{aligned}$$

Pour $n = 3$

$$\begin{aligned} A &= \frac{n^3+1}{n+1} \\ &= \frac{3^3+1}{3+1} \\ &= \frac{28}{4} \\ &= 7 \end{aligned}$$

Pour $n = 0$

$$\begin{aligned} B &= n^2 - n + 1 \\ &= 0^2 - 0 + 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Pour $n = 1$

$$\begin{aligned} B &= n^2 - n + 1 \\ &= 1^2 - 1 + 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Pour $n = 2$

$$\begin{aligned} B &= n^2 - n + 1 \\ &= 2^2 - 2 + 1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

Pour $n = 3$

$$\begin{aligned} B &= n^2 - n + 1 \\ &= 3^2 - 3 + 1 \\ &= 7 \end{aligned}$$

Question 2 : D'après les résultats précédents, on peut déduire que $A = B$.

Question 3 : Pour prouver cette conjecture, on résonne pour tout n par le critère de différence :

$$
\begin{aligned}
A-B &= \frac{n^3+1}{n+1} - \left(n^2-n+1\right) \\
&= \frac{n^3+1}{n+1} - n^2+n-1 \\
&= \frac{n^3+1}{n+1} + \frac{\left(-n^2+n-1\right)(n+1)}{n+1} \\
&= \frac{n^3+1}{n+1} + \frac{-n^3+n^2-n-n^2+n-1}{n+1} \\
&= \frac{n^3+1-n^3+n^2+n-n^2-n+1}{n-1} \\
&= \frac{\cancel{n^3}+\cancel{1}\cancel{-n^3}+\cancel{n^2}+\cancel{n}\cancel{-n^2}\cancel{-n}+\cancel{1}}{n-1} \\
&= \frac{0}{n+1} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

On arrive à $A-B=0$ donc $A=B$. Les deux expressions sont égales. La conjecture est prouvée.

Exercice 3

Question : La résolution de chaque équation dans $\mathbb{R}$ donne :

■ Résolvons l'équation $(7x-3)=(14x-6)(x-2)$:

$$
\begin{aligned}
(7x-3) &= (14x-6)(x-2) \\
(7x-3)-(14x-6)(x-2) &= 0 \\
(7x-3)-2(7x-3)(x-2) &= 0 \\
(7x-3)[1-2(x-2)] &= 0 \\
(7x-3)(1-2x+4) &= 0 \\
(7x-3)(-2x+5) &= 0
\end{aligned}
$$

Un produit de facteurs est nul si au moins l'un d'eux est nul

On a d'une part
$$
\begin{aligned}
7x-3 &= 0 \\
7x &= 3 \\
x &= \frac{3}{7}
\end{aligned}
$$

on a d'autre part
$$
\begin{aligned}
-2x+5 &= 0 \\
-2x &= -5 \\
x &= \frac{5}{2}
\end{aligned}
$$

Les solutions de cette équation sont $x=\dfrac{3}{7}$ et $x=\dfrac{5}{2}$.

■ Résolvons l'équation $x^2-9+(3x+5)(x+3)=0$:

$$\begin{aligned} x^2-9+(3x+5)(x+3)&=0\\ (x-3)(x+3)+(3x+5)(x+3)&=0\\ (x+3)[(x-3)+(3x+5)]&=0\\ (x+3)(x-3+3x+5)&=0\\ (x+3)(4x+2)&=0 \end{aligned}$$

Un produit de facteurs est nul si au moins l'un d'eux est nul

On a d'une part $x+3=0$

$$x=-3$$

on a d'autre part $4x+2=0$

$$4x=-2$$

$$x=\frac{-2}{4}$$

Les solutions de cette équation sont $x=-3$ et $x=\frac{-1}{2}$.

■ Résolvons l'équation $x^2-5=0$:

$$\begin{aligned} x^2-5&=0\\ x^2-\sqrt{5}^2&=0\\ \left(x-\sqrt{5}\right)\left(x+\sqrt{5}\right)&=0 \end{aligned}$$

Un produit de facteurs est nul si au moins l'un d'eux est nul

On a d'une part $x-\sqrt{5}=0$

$$x=\sqrt{5}$$

on a d'autre part $x+\sqrt{5}=0$

$$x=-\sqrt{5}$$

Les solutions de cette équation sont $x=-\sqrt{5}$ et $x=\sqrt{5}$.