MATHEMATIQUES - 2nde — Année Scolaire 2021-2022

Evaluation n°11 - *Correction* — Mardi 7 juin 2022

Exercice 1

Question 1 : Les normes des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DB}$ se calculent de la façon suivante :

Comme $A\left(-2;3\right)$ et $C\left(2;\frac{-7}{2}\right)$ alors $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2-(-2)\\ \frac{-7}{2}-3\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\ \frac{-13}{2}\end{pmatrix}$.

Comme $D\left(-2;\frac{-7}{2}\right)$ et $B\left(2;3\right)$ alors $\overrightarrow{DB}\begin{pmatrix}2-(-2)\\ 3-\frac{-7}{2}\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{DB}\begin{pmatrix}4\\ \frac{13}{2}\end{pmatrix}$.

Les normes se calculent par :

$$AC=\left\|\overrightarrow{AC}\right\| \qquad DB=\left\|\overrightarrow{DB}\right\|$$

$$AC=\sqrt{4^2+\left(\frac{13}{2}\right)^2} \qquad DB=\sqrt{4^2+\left(\frac{13}{2}\right)^2}$$

$$AC=\sqrt{16+\frac{169}{4}} \qquad DB=\sqrt{16+\frac{169}{4}}$$

Question 2 : Les coordonnées du milieu I du segment $[AC]$ et celles du milieu J du segment $[DB]$ se calculent par :

$$I\left(\frac{x_A+x_C}{2};\frac{y_A+y_C}{2}\right) J\left(\frac{x_D+x_B}{2};\frac{y_D+y_B}{2}\right)$$

$$I\left(\frac{-2+2}{2};\frac{3+\frac{-7}{2}}{2}\right) J\left(\frac{-2+2}{2};\frac{\frac{-7}{2}+3}{2}\right)$$

$$I\left(0;\frac{-1}{4}\right) J\left(0;\frac{-1}{4}\right)$$

Question 3 : D'après les questions 1 et 2, les deux diagonales du quadrilatère $ABCD$ ont la même longueur et se coupent en un même milieu : le quadrilatère $ABCD$ est un rectangle.

Question 4 : La longueur et la largeur du rectangle se calculent par :

Comme $A\left(-2;3\right)$ et $B\left(2;3\right)$ alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2-(-2)\\ 3-3\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\ 0\end{pmatrix}$.

Comme $B\left(2;3\right)$ et $C\left(2;\frac{-7}{2}\right)$ alors $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}2-2\\ \frac{-7}{2}-3\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0\\ \frac{-13}{2}\end{pmatrix}$.

Les normes se calculent par :

$$AB = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \qquad BC = \left\|\overrightarrow{BC}\right\|$$

$$AB = \sqrt{4^2+0^2} \qquad BC = \sqrt{0^2+\left(\frac{-13}{2}\right)^2}$$

$$AB = 4 \qquad BC = \frac{13}{2}$$

Le rapport $\frac{L}{l}$ donne alors :

$$\frac{L}{l} = \frac{BC}{AB}$$
$$\frac{L}{l} = \frac{\frac{13}{2}}{4}$$
$$\frac{L}{l} = \frac{13}{8}$$
$$\frac{L}{l} = 1,625$$

On remarque que $\frac{L}{l} \simeq \phi$: on peut en déduire que le rectangle est un rectangle d'or.

Exercice 2

Question 1 : Le rayon du cercle $\mathscr{C}$ se calcule par :

Comme $A\left(-4;2\right)$ et $B\left(2;3\right)$ alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2-(-4)\\3-2\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix}$.

La norme se calcule par :

$$AB = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|$$
$$AB = \sqrt{6^2+1^2}$$
$$AB = \sqrt{37}$$

Le rayon du cercle est $R = \sqrt{37}$.

Question 2 : Pour montrer que les points A, B et E sont alignés, on montre que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont colinéaires.

On connaît déjà les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix}$.

Comme $A\left(-4;2\right)$ et $E\left(-10;1\right)$ alors $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}-10-(-4)\\1-2\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}-6\\-1\end{pmatrix}$.

On calcule ensuite leur déterminant :

$$\begin{aligned}\det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AE}\right) &= \begin{vmatrix}6 & -6\\1 & -1\end{vmatrix}\\ &= -6\times(-1)-1\times(-6)\\ &= -6+6\\ &= 0\end{aligned}$$

Comme $\det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AE}\right)=0$, alors les deux vecteurs sont colinéaires. Avec un point en commun, les trois points sont donc alignés.

Question 3 : Posons $C\left(x_C;y_C\right)$. Si le quadrilatère $ABCD$ est un carré, alors on $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

On connaît déjà les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix}$.

Comme $D\left(-3;-4\right)$ et $C\left(x_C;y_C\right)$ alors $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}x_C-(-3)\\y_C-(-4)\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}x_C+3\\y_C+4\end{pmatrix}$.

Les deux vecteurs devant être égaux, leurs coordonnées le sont aussi. On a alors : $\begin{cases}x_C+3 &= 6\\y_C+4 &= 1\end{cases}$.

Ce qui donne $\begin{cases}x_C &= 3\\y_C &= -3\end{cases}$

Les coordonnées de C sont $C\left(3;-3\right)$.

Question 4 : Une équation cartésienne de la droite (AD) s'écrit sous la forme $ax+by+c=0$. Pour déterminer les coefficients a , b et c, on considère un point M de la droite (AD), de coordonnées $M\left(x;y\right)$ et on forme les vecteur $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AM}$:

Comme $A\left(-4;2\right)$ et $D\left(-3;-4\right)$ alors $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-3-(-4)\\-4-2\end{pmatrix}$, ce qui donne $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}1\\-6\end{pmatrix}$.

Comme $A\left(-4;2\right)$ et $M\left(x;y\right)$ alors $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-(-4)\\y-2\end{pmatrix}$, ce qui donne $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+4\\y-2\end{pmatrix}$.

Les trois points A, D et M étant sur la même droite, les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires. Leur déterminant est donc nul et on a alors l'équation :

$$\begin{aligned}
\det\left(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AM}\right) &= 0\\
\begin{vmatrix} 1 & x+4 \\ -6 & y-2 \end{vmatrix} &= 0\\
1\left(y-2\right)-\left(-6\right)\left(x+4\right) &= 0\\
y-2+6x+24 &= 0\\
6x+y+22 &= 0
\end{aligned}$$

L'équation cartésienne de la droite (AD) est bien $6x+y+22=0$.

Question 5 : Une équation réduite de la droite (AD) donne :

$$\begin{aligned}
6x+y+22 &= 0\\
y &= -6x-22
\end{aligned}$$

Question 6 : Pour montrer que le point F appartient à la droite (AD), on remplace ses coordonnées dans l'équation :

$$\begin{aligned}
6x+y+22 &= 6\times(-5)+8+22\\
6x+y+22 &= -30+8+22\\
6x+y+22 &= 0
\end{aligned}$$

L'équation est vérifiée : le point F appartient bien à la droite (AD).