Correction de l'évaluation n°3 de mathématiques du mardi 13 octobre 2020

Exercice 1

Question 1 : Démontrons que $IH = 4$ à l'aide du théorème de Thalès :
Les droites HK et ML sont parallèles. Les droites (IM) et (IL) sont sécantes en I. L'égalité des rapports qui nous intéresse ici est $\dfrac{IH}{IM} = \dfrac{IK}{IL}$. Cela donne :

$$\begin{aligned}
\frac{IH}{IM} &= \frac{IK}{IL} \\
\frac{IH}{IH+IM} &= \frac{IK}{IK+KL} \\
\frac{IH}{IH+3,2} &= \frac{2,5}{2,5+2} \\
&= \frac{2,5}{4,5} \\
&= \frac{5}{9}
\end{aligned}$$

Avec le produit en croix, nous arrivons à :

$$\begin{aligned}
9IH &= 5\left(IH+3,2\right) \\
9IH &= 5IH + 5 \times 3,2 \\
9IH - 5IH &= 16 \\
4IH &= 16 \\
IH &= \frac{16}{4} \\
IH &= 4
\end{aligned}$$

On conclue avec $IH = 4$.

Question 2 : Le triangle HGI est rectangle en H. On peut donc utiliser le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned}
GI^2 &= IH^2 + HG^2 \\
GI &= \sqrt{IH^2 + HG^2} \\
&= \sqrt{4^2 + 3^2} \\
&= \sqrt{16+9} \\
&= \sqrt{25} \\
&= 5
\end{aligned}$$

On conclue avec $GI = 5$.

Question 3 : Comme les triangles IHG et IJK sont semblables, alors leurs côtés sont proportionnels. Ainsi, $JK = kGH$. Or, $k = \dfrac{IJ}{IH}$ soit $k = \dfrac{2}{4}$ d'où $k = \dfrac{1}{2}$. Donc $JK = \dfrac{1}{2}GH$, ce qui donne $JK = \dfrac{1}{2} \times 3$ soit $JK = 1,5$.

Question 4 : Dans le triangle IJK, le plus grand côté est IK.

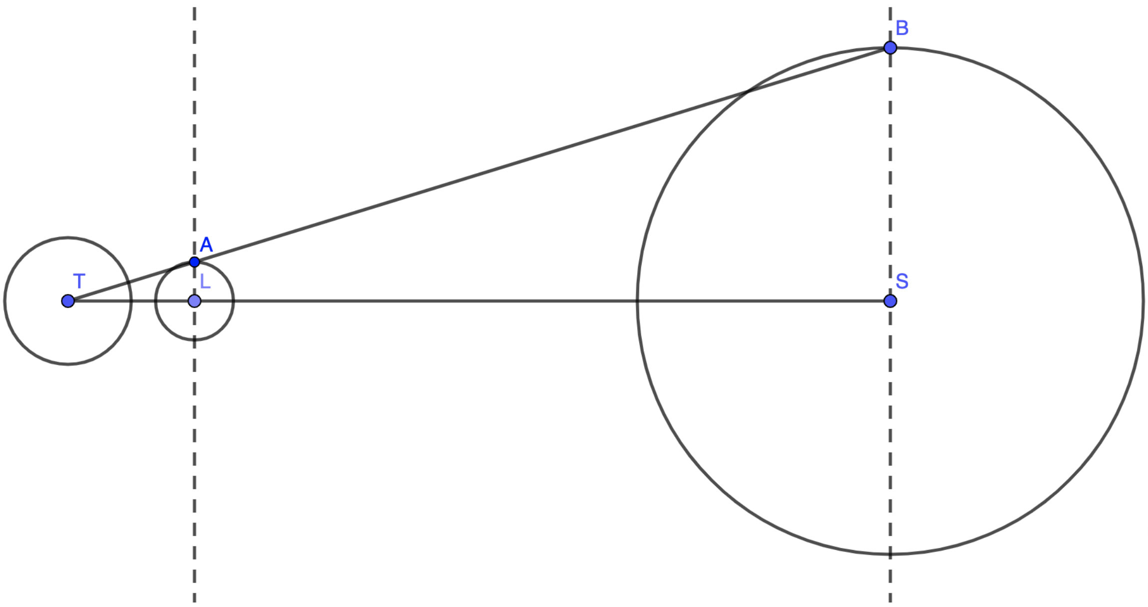
$$\begin{aligned} IK^2 &= 2,5^2 \\ &= 6,25 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} IJ^2 + JK^2 &= 2^2 + 1,5^2 \\ &= 4 + 2,25 \\ &= 6,25 \end{aligned}$$

Comme $IK^2 = IJ^2 + JK^2$, alors d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle IJK est rectangle en J. Par conséquent, les droites (IJ) et (JK) sont perpendiculaires.

Question 5 : Les droites (JK) et (GH) sont perpendiculaires à la même droite (JH). Par conséquent, les droites (GH) et (JK) sont parallèles.

Exercice 2

La situation peut être schématisée de la façon suivante :



On note par T le centre de la Terre, L le centre de la Lune et S le centre du Soleil.
On pose A un point de la surface de la Lune et B un point de la surface du Soleil tels que les droites (LA) et (SB) soient parallèles.
Comme les deux droites (LA) et (SB) sont parallèles et que les droites (TB) et (TS) sont sécantes en T, on utilise le théorème de Thalès. L'égalité de rapport qui nous intéresse est alors $\dfrac{TL}{TS} = \dfrac{AL}{BS}$.
La distance AL n'est autre que le rayon de la Lune noté $R_L = 1750$.
La distance BS n'est autre que le rayon du Soleil noté R_S.

La distance TS se décrit par :

$$\begin{aligned}TS &= R_T + \text{distance Terre-Soleil} + R_S \\ &= 6370 + 150000000 + R_S \\ &= 150006370 + R_S\end{aligned}$$

La distance TL se décrit par :

$$\begin{aligned}TL &= R_T + \text{distance Terre-Lune} + R_L \\ &= 6370 + 375000 + 1750 \\ &= 380120\end{aligned}$$

Ainsi, l'égalité de Thalès devient :

$$\begin{aligned}\frac{TL}{TS} &= \frac{AL}{BS} \\ \frac{380120}{150006370 + R_S} &= \frac{1750}{R_S} \\ 380120 \times R_S &= 1750 \times (150006370 + R_S) \\ 380120 \times R_S &= 1750 \times 150006370 + 1750 \times R_S \\ 380120 \times R_S - 1750 \times R_S &= 1750 \times 150006370 \\ R_S \times (380120 - 1750) &= 1750 \times 150006370 \\ R_S \times 378370 &= 1750 \times 150006370 \\ R_S &= \frac{1750 \times 150006370}{378370} \\ R_S &\simeq 693795\end{aligned}$$

Le rayon du Soleil est estimé à environ 693 795 km.

Exercice 3

La longueur L du parcourt se calcule par $L = AB + BC + CD + DE$.
La longueur BC est inconnue. Comme le triangle ABC est rectangle en A, on peut donc utiliser le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 \\ BC &= \sqrt{AB^2 + AC^2} \\ &= \sqrt{300^2 + 400^2} \\ &= \sqrt{90000 + 160000} \\ &= \sqrt{250000} \\ &= 500 \end{aligned}$$

Donc $BC = 500$m.
Comme les droites (AE) et (BD) se coupent en C et que les droites (AB) et (DE) sont parallèles, on utilise le théorème de Thalès avec l'égalité $\dfrac{AC}{CE} = \dfrac{BC}{CD}$:

$$\begin{aligned} \frac{AC}{CE} &= \frac{BC}{CD} \\ CD &= \frac{BC \times CE}{AC} \\ &= \frac{500 \times 1000}{400} \\ &= 1250 \end{aligned}$$

Ensuite, on calcule la distance DE avec le théorème de Thalès dans la mÃªme configuration que précédemment :

$$\begin{aligned} \frac{AC}{CE} &= \frac{AB}{DE} \\ DE &= \frac{AB \times CE}{AC} \\ &= \frac{300 \times 1000}{400} \\ &= 750 \end{aligned}$$

On résume le calcul final par :

$$\begin{aligned} L &= 300 + 500 + 1250 + 750 \\ &= 2800 \end{aligned}$$

La longueur réelle du parcours $ABCDE$ est de 2800 m.