Devoir en Temps Libre n˚4
Proposition d'exercices
Version 1

Exercice 1

Un entier naturel non nul est abondant si la somme de ses diviseurs positifs est strictement supérieur à son double.

Question 1 : Montrer que 20 est abondant et que 25 ne l'est pas.

Question 2 : Déterminer le plus petit nombre abondant.

Question 3 : Qu'affiche l'algorithme ci-dessous pour $N = 12$ puis pour $N = 16$?

```
Lire N
S ← 0
Pour I allant de 1 à partie entière de √N
    Si N/I est un entier
        S ← S+I+N/I
    Fin Si
Fin Pour
Si √N est un entier
    S ← S − √N
Fin Si
Afficher S
```

Question 4 : Quel est le rôle de cet algorithme ?

Question 5 : Compléter cet algorithme pour trouver tous les nombres abondants compris entre 1 et 100.

Question 6 : Programmer en langage Pithon l'algorithme compléter. (On le testera à la calculatrice et on recopiera le programme sur la copie)

Question 7 : Dresser la liste de tous les nombres abondants compris entre 1 et 100.

Question 8 : Démontrer qu'il existe une infinité de nombres abondants.

Question 9 : Existe-il un nombre abondant impair ? Si oui, quel est le plus petit ?

Exercice 2

On considère un triangle ABC et x un nombre réel différent de -1.
Les points R et S sont définis par $\overrightarrow{AR} = x\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BS} = \frac{1}{x+1}\overrightarrow{BC}$.

Question : Prouver que les points R, A et S sont alignés.

Exercice 3

Dans un triangle ABC quelconque, on définit le point G par la relation vectorielle $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$.

Question 1 : A l'aide de la relation de Chasles, démontrer que $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$.

Question 2 : Tracer un triangle ABC puis placer le point G.

Question 3 : On note A' le milieu du segment $[BC]$. Que vaut la somme $\overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'C}$?

Question 4 : Démontrer que $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$.

Question 5 : A quelle droite du triangle ABC appartient le point G ?

Question 6 : On note B' le milieu de $[AC]$. Démontrer que $\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BB'}$.

Question 7 : A quelle droite du triangle ABC appartient le point G ?

Remarque : Le point G, ici, est appelé le centre de gravité du triangle ABC.

Exercice 4

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ et la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^2 + 1$.

Question 1 : Factoriser l'expression $x^3 + x^2$.

Question 2 : En déduire une factorisation de la fonction g.

Question 3 : On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$. Déterminer l'ensemble de définition de f.

Question 4 : A l'aide des questions précédentes, montrer que la fonction f est une fonction affine.

Exercice 5

On considère la fonction f définie sur in intervalle I par $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$. On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère.

Question 1 : Etudier le signe de l'expression $16 - x^2$ et en déduire que $I = [-4;4]$.

Question 2 : Etudier le signe de f sur I. Que peut-on en déduire pour la courbe (C_f) ?

Question 3 : Etudier la parité de la fonction f sur I et en déduire une éventuelle conséquence géométrique de la courbe (C_f).

Question 4 : Etudier les variations de f sur I.

Question 5 : Déterminer le maximum de la fonction f sur I.

Question 6 : Sur papier millimétré, tracer la courbe (C_f) en choisissant un repère et une échelle adéquate, puis conjecturer la nature de la courbe (C_f).

Exercice 6

On considère un triangle quelconque ABC. On note :

- les points A', B' et C' les milieus respectifs des segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.
- les points P, Q et R' les pieds des hauteurs du triangle ABC issues respectivement des points A, B et C.
- le point H, l'orthocentre du triangle ABC.
- les points L, M et N les milieux respectifs des segments $[AH]$, $[BH]$ et $[CH]$.
- le point O, centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
- le point Ω, le milieu du segment $[OH]$
- r le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC.

Question 1 : Faire une figure.

Question 2 : Montrer que le quadrilatère $B'C'MN$ est un rectangle.

Question 3 : Montrer que le quadrilatère $A'C'LN$ est un rectangle.

Question 4 : En déduire que les six points A', L, B', M, C' et N sont cocycliques. On notera $\mathscr{C}$ ce cercle.

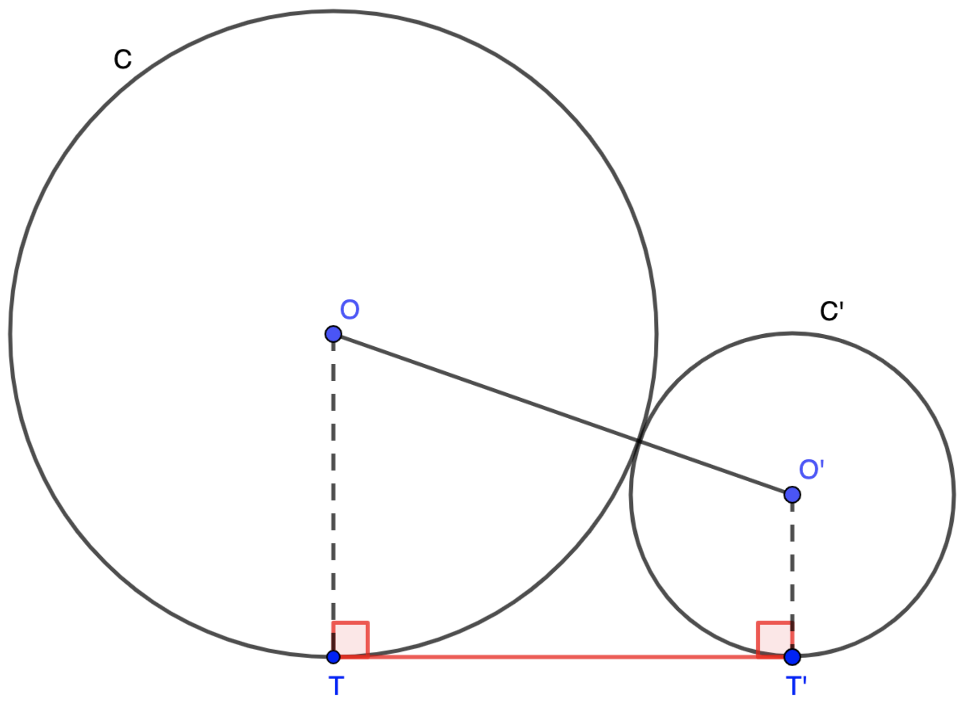
Question 5 : Montrer que le point P est un point du cercle $\mathscr{C}$

Question 6 : Montrer que les points Q et R appartiennent à $\mathscr{C}$.

Question 7 : Montrer que le centre du cercle $\mathscr{C}$ est le point Ω et que le rayon du cercle $\mathscr{C}$ est égal à $\frac{r}{2}$.

Exercice 7

On considère deux cercles C et C' de centre respectif O et O' et de rayon respectif R et R' tels que $R > R'$.
Ces deux cercles sont tangents extérieurement. On note $[TT']$, un segment tangent aux deux cercles comme indiqué sur la figure suivante :



Question : Démontrer que $TT'^2 = 4RR'$.

Exercice 8

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{10}{x^2+1}$. On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère.

Question 1 : Recopier et compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

x	-7	-3	-2	-1	0	1	2	3	7
$f(x)$									

Question 2 : Montrer que, pour tout réel x, $f(x) > 0$. Que peut-on en déduire pour la courbe (C_f) ?

Question 3 : Montrer que, pour tout réel x, $f(x) > 0$. Que peut-on en déduire pour la courbe (C_f) ?

Question 4 : Etudier la parité de la fonction f sur I et en déduire une éventuelle conséquence géométrique de la courbe (C_f).

Question 5 : Etudier les variations de f sur $[O;+\infty[$.

Question 6 : Montrer que la fonction f a un maximum en 0 égal à 10 sur I.

Question 7 : Sur papier millimétré, tracer la courbe (C_f) en choisissant un repère et une échelle adéquate, puis conjecturer la nature de la courbe (C_f).

Question 8 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 1$ puis l'inéquation $f(x) \leqslant 2$.