Correction de l'évaluation de mathématiques n°7 du lundi 25 janvier 2021

Exercice 1

Question 1a : Le développement de cette expression littérale donne :

$$\begin{aligned}(x-2)\left(x^2-1\right) &= x^3-x-2x^2+2\\ &= x^3-2x^2-x+2\end{aligned}$$

Question 1b : Résoudre l'équation $x^3-2x^2-x+2=0$ dans $\mathbb{R}$ revient à résoudre l'équation l'équation $(x-2)\left(x^2-1\right)=0$.
Or, un produit de facteur est nul si au moins l'un des deux facteurs est nul. Ce qui implique la résolution des deux petites équations :

$$\begin{aligned}\text{On a d'une part } x-2 &= 0 \\ x &= 2\end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned}\text{et d'autre par } x^2-1 &= 0\\ (x-1)(x+1) &= 0\\ x = 1 \text{ ou } x &= -1\end{aligned}$$

Les solutions de l'équation sont donc $S=\{-1;1;2\}$.

Question 2a : Pour vérifier que pour tout nombre réel x, avec $x \neq -2$, on a $x-2-\dfrac{5}{x+2}=\dfrac{x^2-9}{x+2}$, on transforme l'écriture $x-2-\dfrac{5}{x+2}$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned}x-2-\frac{5}{x+2} &= \frac{(x-2)(x+2)}{x+2}-\frac{5}{x+2}\\ &= \frac{x^2-4}{x+2}-\frac{5}{x+2}\\ &= \frac{x^2-4-5}{x+2}\\ &= \frac{x^2-9}{x+2}\end{aligned}$$

On arrive bien à $x-2-\dfrac{5}{x+2}=\dfrac{x^2-9}{x+2}$.

Question 2b : La résolution de l'équation $x-2=\dfrac{5}{x+2}$ donne :

$$\begin{aligned}
x-2 &= \frac{5}{x+2}\\
x-2-\frac{5}{x+2} &= 0\\
\frac{x^2-9}{x+2} &= 0\\
x^2-9 &= 0\\
(x-3)\,(x+3) &= 0
\end{aligned}$$

Un produit de facteur est nul si au moins l'un des deux facteurs est nul. On a alors :

On a d'une part $x-3=0$ et d'autre par $x+3=0$

$x=3$ $\qquad$ $x=-3$

Les solutions de l'équation $x-2=\dfrac{5}{x+2}$ sont $S=\{-3;3\}$.

Exercice 2

Question : Le développement de chaque expression donne :

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 &= (\sqrt{a})^2+2\sqrt{a}\sqrt{b}+\left(\sqrt{b}\right)^2\\
&= a+2\sqrt{ab}+b
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 &= (\sqrt{a})^2-2\sqrt{a}\sqrt{b}+\left(\sqrt{b}\right)^2\\
&= a-2\sqrt{ab}+b
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(2\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 &= (2\sqrt{a})^2+2\times2\sqrt{a}\sqrt{b}+\left(\sqrt{b}\right)^2\\
&= 4a+4\sqrt{ab}+b
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\left(\sqrt{2a}-\sqrt{2b}\right)^2 &= \left(\sqrt{2a}\right)^2-2\sqrt{2a}\sqrt{2b}+\left(\sqrt{2b}\right)^2\\
&= 2a-4\sqrt{ab}+2b
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(2\sqrt{a}+3\sqrt{b}\right)\left(2\sqrt{a}-3\sqrt{b}\right) &= (2\sqrt{a})^2-\left(3\sqrt{b}\right)^2\\
&= 4a-9b
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{2a}-\sqrt{3b}\right)\left(\sqrt{2a}+\sqrt{3b}\right) &= \left(\sqrt{2a}\right)^2-\left(\sqrt{3b}\right)^2\\
&= 2a-3b
\end{aligned}$$

Exercice 3

Question 1 : Calculer l'ordonnée du point de (C_f) qui a pour abscisses 3 revient à calculer $f(3)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 - 5x + 2 \\ f(3) &= 2 \times 3^2 - 5 \times 3 + 2 \\ &= 2 \times 9 - 15 + 2 \\ &= 18 - 13 \\ &= 5 \end{aligned}$$

L'ordonnée du point de (C_f) qui a pour abscisses 3 est 5.

Question 2 : Calculer la (les) abscisse(s) du(des) point(s) de (C_f) qui a(ont) pour ordonnée 2 revient à résoudre l'équation $f(x) = 2$:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2 \\ 2x^2 - 5x + 2 &= 2 \\ 2x^2 - 5x + 2 - 2 &= 0 \\ 2x^2 - 5x &= 0 \\ x(2x - 5) &= 0 \end{aligned}$$

Un produit de facteur est nul si au moins l'un des deux facteurs est nul :

On a d'une part $x = 0$ et d'autre par $2x - 5 = 0$

$$\begin{aligned} 2x &= 5 \\ x &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Les abscisses des points de (C_f) qui ont pour ordonnée 2 sont 0 et $\frac{5}{2}$.

Question 3 : Déterminer les coordonnées du point d'intersection de (C_f) avec la droite d'équation $x = 2$ revient à chercher l' abscisse et l'ordonnée du point d'intersection avec la droite et la courbe (C_f). Il est trivial de trouver l'abscisse égale à 2. L'ordonnée qui correspond est égale à $f(2)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 - 5x + 2 \\ f(2) &= 2 \times 2^2 - 5 \times 2 + 2 \\ &= 2 \times 4 - 10 + 2 \\ &= 8 - 8 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Les coordonnées sont $(2;0)$.

Question 4 : Le calcul de $f(-1)$ donne :

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 - 5x + 2 \\ f(-) &= 2 \times (-1)^2 - 5 \times (-1) + 2 \\ &= 2 \times 1 + 5 + 2 \\ &= 2 + 7 \\ &= 9 \end{aligned}$$

On peut dire que le point de coordonnées $(-1;9)$ est un point de la courbe (C_f).

Exercice 4

Question 1 : D'après l'énoncé, le point M se situe entre les points A et B. La variable x appartient donc à l'intervalle $I = [0;4]$.

Question 2 : Pour dresser le tableau de variations de la fonction f, il est nécessaire auparavant de déterminer $M'B$:
D'après la figure, :

$$\begin{aligned} DB &= DM' + M'B \\ M'B &= DB - DM' \end{aligned}$$

Comme le triangle ADB est rectangle en A, on peut utiliser le théorème de Pythagore : $DB^2 = AD^2 + AB^2$. On a alors :

$$\begin{aligned} M'B &= \sqrt{AD^2 + AB^2} - DM' \\ &= \sqrt{4^2 + 4^2} - 4 \\ &= 4\sqrt{2} - 4 \\ &= 4\left(\sqrt{2} - 1\right) \end{aligned}$$

Le tableau de variations de f devient donc :

x	0	4
Variations de f	0 ↗	$4\left(\sqrt{2}-1\right)$

Question 3 : Déterminer $f(3)$ revient à calculer $M'M$ avec $AM = 3$. Le triangle ADM étant rectangle, on peut utiliser le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} DM^2 &= AD^2 + AM^2 \\ DM &= \sqrt{AD^2 + AM^2} \\ &= \sqrt{4^2 + 3^2} \\ &= \sqrt{16+9} \\ &= \sqrt{25} \\ &= 5 \end{aligned}$$

Comme ensuite $DM = DM' + M'M$ alors $M'M = DM - DM'$ soit $M'M = 5 - 4$, ce qui donne $M'M = 1$. On en conclut que $f(3) = 1$.

Question 4 : Précédemment, on a vu que $f(3) = 1$. Comme la fonction est croissante sur I, alors les valeurs de x et de I pour lesquelles $f(x) \geqslant 1$ sont sur l'intervalle $[3;4]$.

Exercice 5

Question 1 : Montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $A(x) = (x-2)(x-5)$:

$$\begin{aligned} A(x) &= (x-2)(x-5) \\ &= x^2 - 5x - 2x + 10 \\ &= x^2 - 7x + 10 \end{aligned}$$

On arrive bien à l'expression initiale de A.

Question 2 : Les calculs de $A\left(\frac{1}{2}\right)$ et de $A\left(\frac{4}{3}\right)$ deviennent :

$$\begin{aligned} A(x) &= (x-2)(x-5) \\ &= \left(\frac{1}{2} - 2\right)\left(\frac{1}{2} - 5\right) \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{10}{2}\right) \\ &= \frac{-3}{2} \times \frac{-9}{2} \\ &= \frac{27}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A(x) &= (x-2)(x-5) \\ &= \left(\frac{4}{3} - 2\right)\left(\frac{4}{3} - 5\right) \\ &= \left(\frac{4}{3} - \frac{6}{3}\right)\left(\frac{4}{3} - \frac{15}{3}\right) \\ &= \frac{-2}{3} \times \frac{-11}{3} \\ &= \frac{22}{9} \end{aligned}$$

On obtient $A\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{27}{4}$ et $A\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{22}{9}$.

Question 3 : Les calculs de $A\left(\sqrt{2}\right)$ et de $A\left(3-\sqrt{2}\right)$ donnent :

$$\begin{aligned} A(x) &= x^2-7x+10 \\ A\left(\sqrt{2}\right) &= \left(\sqrt{2}\right)^2-7\sqrt{2}+10 \\ &= 2-7\sqrt{2}+10 \\ &= 12-7\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A(x) &= x^2-7x+10 \\ A\left(3-\sqrt{2}\right) &= \left(3-\sqrt{2}\right)^2-7\left(3-\sqrt{2}\right)+10 \\ &= 9-2\times 3\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2-21+7\sqrt{2}+10 \\ &= 9-6\sqrt{2}+2-11+7\sqrt{2} \\ &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

On obtient$A\left(\sqrt{2}\right)=12-7\sqrt{2}$ et $A\left(3-\sqrt{2}\right)=\sqrt{2}$.

Question 4 : Résoudre $A(x)=0$ revient à résoudre $(x-2)(x-5)=0$
Un produit de facteur est nul si au moins l'un des deux facteurs est nul :

On a d'une part $x-2=0$
$x=2$

et d'autre par $x-5=0$
$x=5$

Les solutions de l'équation $A(x)=0$ sont $S=\{2;5\}$.

Exercice 6

Question 1 : D'après le schéma, le point D appartient au segment $[AB]$, les valeurs de x sont comprises dans l'intervalle $[0;4]$.

Question 2a : Les droites (BC) et (AB) sont sécantes en B. Les droites (AC) et (ED) sont parallèles. On peut donc utiliser le théorème de Thalès :

$$\begin{aligned} \frac{BD}{AB} &= \frac{ED}{AC} \\ ED &= \frac{BD\times AC}{AB} \\ &= \frac{1,5x}{4} \\ &= \frac{3}{8}x \end{aligned}$$

On a finalement $ED=\frac{3}{8}x$.

Question 2b : L'aire $A(x)$, en m^2, du rectangle $ADEF$, se calcule par :

$$\begin{aligned} A(x) &= Ll \\ &= AD \times ED \\ &= (4-x) \times \frac{3}{8}x \\ &= \frac{3(4-x)x}{8} \end{aligned}$$

On obtient $A(x) = \dfrac{3(4-x)x}{8}$.

Question 3a : Montrons que $A(x) - A(2) = -\dfrac{3(x-2)^2}{8}$:

$$\begin{aligned} A(x) - A(2) &= \frac{3(4-x)x}{8} - \frac{3(4-2)\times 2}{8} \\ &= \frac{3\left(4x-x^2\right)}{8} - \frac{3\times 2\times 2}{8} \\ &= \frac{3\left(4x-x^2\right) - 3\times 4}{8} \\ &= \frac{3\left(4x-x^2-4\right)}{8} \\ &= \frac{-3\left(x^2-4x+4\right)}{8} \\ &= \frac{-3(x-2)^2}{8} \end{aligned}$$

On obtient bien $A(x) - A(2) = -\dfrac{3(x-2)^2}{8}$.

Question 3b : D'après la question précédente, le maximum pour A est atteint pour $x = 2$. Ainsi, $AD = 4-2$ soit $AD = 2$m. La distance ED se calcule d'après la question 2a : $ED = \dfrac{3}{8} \times 2$, ce qui donne $ED = 0,75$ m.

Exercice 7

Question 1 : Calculons la valeur exacte de la longueur MC. Comme le quadrilatère $ABCD$ est un carré, le triangle MCI est rectangle en C. On peut donc utiliser le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} MI^2 &= MC^2 + CI^2 \\ MC^2 &= MI^2 - CI^2 \\ MC &= \sqrt{MI^2 - CI^2} \\ &= \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{1 - \frac{1}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{3}{4}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

La valeur exacte de MC est $MC = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Question 2 : Démontrons que le triangle IMN est un triangle équilatéral. Les points M et N appartiennent au cercle donc $MI = IN = 1$. Le triangle IMN est isocèle.
Le triangle BIN étant rectangle en B, on peut utiliser le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} IN^2 &= BI^2 + NB^2 \\ NB^2 &= IN^2 - BI^2 \\ NB &= \sqrt{IN^2 - BI^2} \end{aligned}$$

De la même façon, dans le triangle MCI, avec le théorème de Pythagore, on a $MC = \sqrt{IM^2 - CI^2}$.
Comme $IM = IN$ et que $IC = IB$, on peut écrire que $MC = \sqrt{IN^2 - BI^2}$. Ainsi, $MC = NB$.
On en déduit alors que $[MN]$ est parallèle à $[AD]$. D'où $MN = AD = 1$. Le triangle est finalement équilatéral.

Question 3 : Puisque le triangle est équilatéral, $\widehat{MIN} = 60^\circ$.

Question 4 : L'aire du disque est $A = \pi R^2$ pour un angle de 360°. Une portion de disque de 60°nous donne une aire de $\frac{60\pi R^2}{360}$, ce qui donne une aire de $\frac{\pi}{6}$.
On y ajoute l'aire des deux triangles, soit $\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$. On en déduit que l'aire de la partie en gris foncé est de $\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{6}$ soit $\frac{3\sqrt{3} + 2\pi}{12}$.

Question 5 : L'aire de la partie claire dans $ABCD$ se calcule alors par $1 - \left(\frac{3\sqrt{3} + 2\pi}{12}\right)$ ou encore $\frac{12 - 3\sqrt{3} - 2\pi}{12}$.