***Correction de l'évaluation n°6 de mathématiques du lundi 30 novembre 2020***

## Exercice 1

**Question 1 :** Comme le triangle est rectangle en $A$, on peut utiliser les formules de trigonométrie :

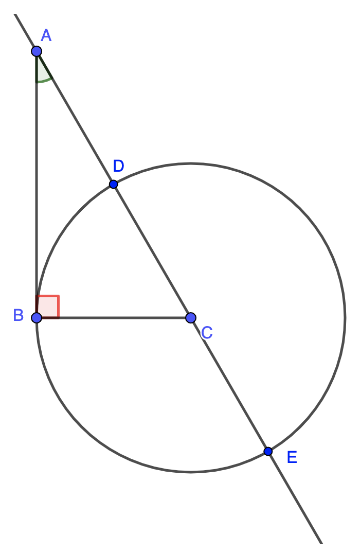
$$\begin{aligned}\sin\left(\widehat{BAC}\right) &= \frac{BC}{AC}\\ AC &= \frac{BC}{\sin\left(\widehat{BAC}\right)}\\ &= \frac{3}{\sin(30)}\\ &= \frac{3}{\frac{1}{2}}\\ &= 3\times 2\\ &= 6\end{aligned}$$

La longueur $AC$ est de 6 cm.
De la même façon, on calcule la longueur $AB$ :

$$\begin{aligned}\cos\left(\widehat{BAC}\right) &= \frac{AB}{AC}\\ AB &= AC\cos\left(\widehat{BAC}\right)\\ &= 6\cos(30)\\ &= \frac{6\sqrt{3}}{2}\\ &= 3\sqrt{3}\end{aligned}$$

La longueur $AB$ est de $3\sqrt{3}$ cm.

**Question 2 :** Le schéma donne :



**Question 3 :** Le cercle est circonscrit à un triangle dont le plus grand côté est le diamètre de ce cercle. Par conséquent, le triangle est rectangle.

**Question 4 :** La somme des trois angles d'un triangle est de 180°. On a alors :

$$\begin{aligned}
\widehat{BAC}+\widehat{BCA}+\widehat{CBA} &= 180 \\
\widehat{BCA} &= 180-\widehat{CBA}-\widehat{BAC} \\
&= 180-90-30 \\
&= 60
\end{aligned}$$

L'angle $\widehat{BCA}$ est de 60°.
L'angle $\widehat{BCA}$ est un angle au centre qui intercepte l'arc $\widehat{BD}$. L'angle $\widehat{BEA}$ intercepte le même arc. Par conséquent, $\widehat{BCA}=2\widehat{BEA}$ d'où $\widehat{BEA}=\frac{1}{2}\widehat{BCA}$.
L'angle $\widehat{BEA}$ est de 30°.

**Question 5 :** Le triangle $EDB$ étant rectangle en $B$, on peut utiliser la formule de trigonométrie :

$$\begin{aligned}
\cos\left(\widehat{BDC}\right) &= \frac{DB}{DE} \\
DB &= DE\cos\left(\widehat{BDC}\right)
\end{aligned}$$

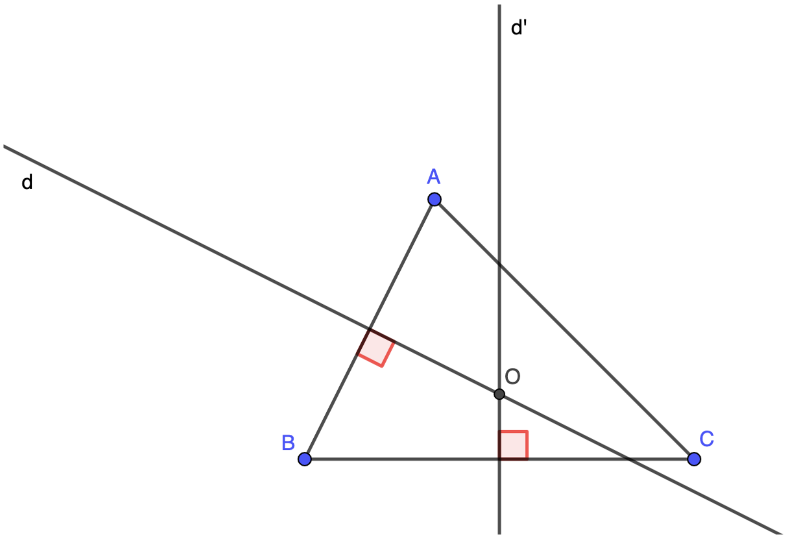
Le triangle $BDC$ est isocèle car $BC=CD$ (ce sont deux rayons du cercle). Les angles $\widehat{CBD}$ et $\widehat{BDC}$ sont égaux. On a alors :

$$\begin{aligned}
2\widehat{BDC}+\widehat{DCB} &= 180 \\
\widehat{BDC} &= \frac{180-\widehat{DCB}}{2} \\
&= \frac{180-60}{2} \\
&= 60
\end{aligned}$$

Ainsi, $DB=6\cos(60)$ soit $DB \simeq 3$ cm.

## Exercice 2

**Question 1 :** Le schéma donne :




**Question 2 :** Le point $O$ est le point d'intersection des deux médiatrices $(d)$ et $(d')$. Or, dans un triangle, le point d'intersection des médiatrices est le centre du cercle circonscrit au triangle. Par conséquent, le point $O$ est le centre du cercle circonscrit au triangle $ABC$.

**Question 3 :** Comme le point $O$ est le centre du cercle circonscrit au triangle, il appartient aux trois médiatrices du triangle. Par conséquent, il appartient à la troisième médiatrice, celle du segment $[AC]$.

## Exercice 3

$ABC$ est un triangle rectangle en $B$ et $\alpha$ est la mesure, en degrés, de l'angle $\widehat{BAC}$. On utilise les formules de trigonométrie :

$$\cos(\alpha) = \frac{AB}{AC} \qquad \sin(\alpha) = \frac{BC}{AC}$$

Par suite, on a :

$$\begin{aligned} \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) &= [\cos(\alpha)]^2 + [\sin(\alpha)]^2 \\ &= \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AC}\right)^2 \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) &= \frac{AB^2}{AC^2} + \frac{BC^2}{AC^2} \\ &= \frac{AB^2 + BC^2.}{AC^2} \end{aligned}$$

Or, d'après le théorème de Pythagore, dans le triangle rectangle $ABC$, on a :

$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) &= \frac{AC^2}{AC^2} \\ &= 1\end{aligned}$$

Conclusion : $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$

## Exercice 4

**Question 1 :** La tangente au point $M$ est perpendiculaire au rayon $[OM]$. De plus, le point $O$ est le projeté orthogonale de $M$ sur la droite $(AB)$. Donc $[OM]$ est perpendiculaire à $(AB)$.
Or, deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles, donc la tangente au point $M$ est parallèle à $(AB)$.

**Question 2 :** Comme $[OM]$ est perpendiculaire à $(AB)$, alors le triangle $OMB$ est rectangle en $B$. On peut donc utiliser la formule de trigonométrie :

$$\begin{aligned}\sin\left(\widehat{OMB}\right) &= \frac{OB}{MB} \\ \widehat{OMB} &= \arcsin\left(\frac{OB}{MB}\right)\end{aligned}$$

Le triangle étant rectangle, on peut utiliser le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned}MB^2 &= OB^2 + OM^2 \\ MB &= \sqrt{2OB^2} \\ &= OB\sqrt{2}\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient :

$$\begin{aligned}\widehat{OMB} &= \arcsin\left(\frac{OB}{MB}\right) \\ &= \arcsin\left(\frac{OB}{OB\sqrt{2}}\right) \\ &= \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\end{aligned}$$

On arrive bien à $\widehat{OMB} = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.