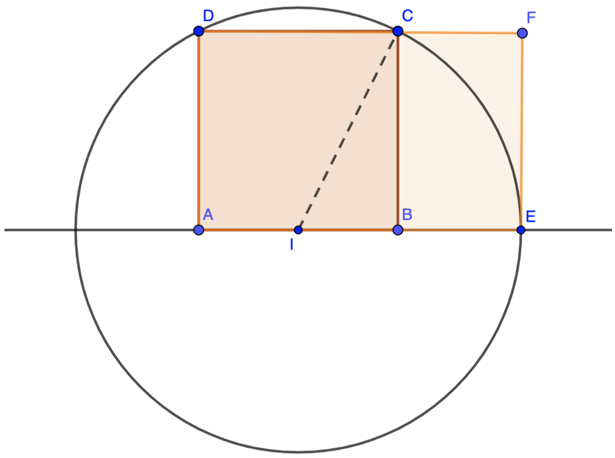
Correction de l'évaluation n°5 de mathématiques

Exercice 1

Question 1 : La construction de la figure donne :



Question 2 : Comme I est le milieu de $[AB]$, alors $IB = \dfrac{AB}{2}$ donc $IB = \dfrac{a}{2}$.
Enfin, comme la longueur du carré est a, on a finalement $CB = a$.

Question 3 : Comme $ABCD$ est un carré, alors le triangle IBC est rectangle en B. On peut donc utiliser le théorème de Pythagore avec l'égalité $IC^2 = IB^2 + BC^2$. D'où :

$$\begin{aligned}
IC^2 &= IB^2 + BC^2 \\
IC &= \sqrt{IB^2 + BC^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} \\
&= \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2} \\
&= \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{4a^2}{4}} \\
&= \frac{a}{2}\sqrt{5}
\end{aligned}$$

La longueur IC est $\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$

Question 4 : Les points E et B sont sur le même cercle de centre I, on a alors $IC = IE$.
Les points I, B et E étant alignés, on a $IE = IB + BE$. Puis :

$$\begin{aligned} IE &= IB + BE \\ BE &= IE - IB \\ &= \frac{a\sqrt{5}}{2} - \frac{a}{2} \\ &= a\frac{\sqrt{5}-1}{2} \end{aligned}$$

Ainsi, $BE = a\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.
Ensuite, les points A, I et E étant alignés, on a $AE = AB + BE$. D'où :

$$\begin{aligned} AE &= AB + BE \\ &= a + a\frac{\sqrt{5}-1}{2} \\ &= a\left(1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \\ &= a\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) \end{aligned}$$

Ainsi, $AE = a\left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$.

Question 5 : Comme $AE = a\left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$ alors :

$$\begin{aligned} AE + FE &= a\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) + a \\ &= a\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} + 1\right) \\ &= a\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} + \frac{2}{2}\right) \\ &= a\left(\frac{\sqrt{5}+3}{2}\right) \end{aligned}$$

Alors, en divisant par AE, on obtient :

$$
\begin{aligned}
\frac{AE+FE}{AE} &= \frac{a\left(\frac{\sqrt{5}+3}{2}\right)}{a\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)} \\
&= \frac{\frac{\sqrt{5}+3}{2}}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} \\
&= \frac{\sqrt{5}+3}{2} \times \frac{2}{\sqrt{5}+1} \\
&= \frac{\sqrt{5}+3}{\sqrt{5}+1} \\
&= \frac{\sqrt{5}+3}{\sqrt{5}+1} \times \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1} \\
&= \frac{\left(\sqrt{5}+3\right)\left(\sqrt{5}-1\right)}{5-1} \\
&= \frac{5-\sqrt{5}+3\sqrt{5}-3}{4} \\
&= \frac{2+2\sqrt{5}}{4} \\
&= \frac{1+\sqrt{5}}{2}
\end{aligned}
$$

Ensuite, le rapport $\frac{AE}{FE}$ donne :

$$
\begin{aligned}
\frac{AE}{FE} &= \frac{a\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)}{a} \\
\frac{AE}{FE} &= \frac{\sqrt{5}+1}{2}
\end{aligned}
$$

On arrive bien à $\frac{AE+FE}{AE} = \frac{AE}{FE}$, ce qu'il fallait démontrer.

Question 6 : Pour montrer que le rectangle $BEFD$ est un rectangle d'or, on montre que le rapport de la longueur par la largeur donne ϕ :

La longueur du rectangle $BEFD$ est $FE = a$ et la largeur est $BE = a\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Le rapport donne donc :

$$\begin{aligned}\frac{FE}{BE} &= \frac{a}{a\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)} \\ &= \frac{2}{\sqrt{5}-1} \\ &= \frac{2}{\sqrt{5}-1} \times \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1} \\ &= \frac{2\left(\sqrt{5}+1\right)}{5-1} \\ &= \frac{2\sqrt{5}+2}{4} \\ &= \frac{\sqrt{5}+1}{2} \\ &= \phi\end{aligned}$$

On a bien $\frac{FE}{BE} = \phi$ donc $BEFC$ est aussi un rectangle d'or.

Exercice 2

Question 1 : L'aire du triangle AGH se note A_{AGH} et se calcule par $A_{AGH} = \frac{AG \times AH}{2}$ soit :

$$\begin{aligned}A_{AGH} &= \frac{AG \times AH}{2} \\ &= \frac{(AB - GB) \times AH}{2} \\ &= \frac{(8-x) \times x}{2} \\ &= \frac{x(8-x)}{2}\end{aligned}$$

L'aire, en mètre carré, est l'aire $A(x) = \frac{x(8-x)}{2}$.

Question 2 : L'expression $8-\frac{1}{2}(x-4)^2$ se développe par :

$$\begin{aligned}
8-\frac{1}{2}(x-4)^2 &= 8-\frac{1}{2}\left(x^2-8x+16\right)\\
&= 8+\frac{-x^2}{2}+4x-8\\
&= \frac{-x^2}{2}+4x\\
&= \frac{-x^2}{2}+\frac{8x}{2}\\
&= \frac{x}{2}(-x+8)
\end{aligned}$$

On arrive bien à $8-\frac{1}{2}(x-4)^2=\frac{x(8-x)}{2}$

Question 3 : L'aire A_{EFGH} se calcule par $A_{EFGH}=A_{ABCD}-4a(x)$. Ce qui donne :

$$\begin{aligned}
A_{EFGH} &= A_{ABCD}-4a(x)\\
&= 8^2-4\left[8-\frac{1}{2}(x-4)^2\right]
\end{aligned}$$

On veut que cette aire soit de 32 m^2. L'équation à résoudre devient donc :

$$\begin{aligned}
8^2-4\left[8-\frac{1}{2}(x-4)^2\right] &= 32\\
64-32+2(x-4)^2 &= 32\\
32+2(x-4)^2 &= 32\\
2(x-4)^2 &= 0
\end{aligned}$$

Ce qui revient à résoudre l'équation $x-4=0$, ce qui donne $x=4$. Ainsi, l'aire sera de 32 m^2 pour $x=4$.

Exercice 3

On note $A(x) = (4x+1)^2 - (6x-11)^2$ pour tout nombre réel x.

Question 1 : Le développement de $A(x)$ donne :

$$\begin{aligned} A(x) &= (4x+1)^2 - (6x-11)^2 \\ &= 16x^2 + 8x + 1 - \left(36x^2 - 132x + 121\right) \\ &= 16x^2 + 8x + 1 - 36x^2 + 132x - 121 \\ &= -20x^2 + 140x - 120 \end{aligned}$$

Question 2 : La factorisation de $A(x)$ donne :

$$\begin{aligned} A(x) &= (4x+1)^2 - (6x-11)^2 \\ &= (4x+1+6x-11)\left[4x+1-(6x-11)\right] \\ &= (10x-10)(4x+1-6x+11) \\ &= 10(x-1)(-2x+12) \\ &= 20(x-1)(-x+6) \end{aligned}$$

Question 3 : On part de l'expression $A(x) = -20\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + 125$. On a alors :

$$\begin{aligned} A(x) &= -20\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + 125 \\ &= -20\left(x^2 - 7x + \frac{49}{4}\right) + 125 \\ &= -20x^2 + 140x - 245 + 125 \\ &= -20x^2 + 140x - 120 \end{aligned}$$

On arrive bien à la forme développée de A donc l'expression $A(x) = -20\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + 125$ est vérifiée.

Question 4a : La résolution donne :

$$\begin{aligned} A(x) &= 0 \\ 20(x-1)(-x+6) &= 0 \end{aligned}$$

Un produit de facteurs est nul si au moins l'un des deux facteurs est nul. On a donc :

D'une part $x - 1 = 0$, $x = 1$ et d'autre part $-x + 6 = 0$, $x = 6$

Les solutions de l'équation $A(x) = 0$ sont $S = \{1;6\}$.

Question 4b : La résolution donne :

$$\begin{aligned}
A\left(x\right) &= 45\\
-20\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+125 &= 45\\
-20\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+125-45 &= 0\\
-20\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+80 &= 0\\
\left(x-\frac{7}{2}\right)^2-4 &= 0\\
\left(x-\frac{7}{2}-2\right)\left(x-\frac{7}{2}+2\right) &= 0\\
\left(x-\frac{11}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right) &= 0
\end{aligned}$$

Un produit de facteurs est nul si au moins l'un des deux facteurs est nul. On a donc :

D'une part $x-\dfrac{11}{2}=0$ et d'autre part $x-\dfrac{3}{2}=0$

$x=\dfrac{11}{2}$ $x=\dfrac{3}{2}$

Les solutions de l'équation $A\left(x\right)=45$ sont $S=\left\{\dfrac{3}{2};\dfrac{11}{2}\right\}$.

Question 4c : La résolution donne :

$$\begin{aligned}
A\left(x\right) &= -120\\
-20x^2+140x-120 &= -120\\
-20x^2+140x-120+120 &= 0\\
-20x^2+140x &= 0\\
-20x\left(x-7\right) &= 0\\
x\left(x-7\right) &= 0
\end{aligned}$$

Un produit de facteurs est nul si au moins l'un des deux facteurs est nul. On a donc :

D'une part $x=0$ et d'autre part $x-7=0$

$x=7$

Les solutions de l'équation $A\left(x\right)=-120$ sont $S=\{0;7\}$.

Question 4d : La résolution donne :

$$\begin{aligned} A\left(x\right) &= -20x^2 \\ -20x^2+140x-120 &= -20x^2 \\ -20x^2+140x-120+20x^2 &= 0 \\ -20x^2+140x &= 0 \\ 140x-120 &= 0 \\ 140x &= 120 \\ x &= \frac{120}{140} \\ x &= \frac{6}{7} \end{aligned}$$

La solution de l'équation $A\left(x\right)=-20x^2$ est $S=\left\{\frac{6}{7}\right\}$.

Exercice 4

1) Résolution de l'équation $4\left(1-x\right)\left(4x+9\right)\left(2x+3\right)=0$:
Un produit de facteurs est nul si au moins l'un d'eux est nul. On a alors :

$$\begin{aligned} \text{Soit } 1-x &= 0 \\ -x &= -1 \\ x &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \text{soit } 4x+9 &= 0 \\ 4x &= -9 \\ x &= \frac{-9}{4} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \text{soit } 2x+3 &= 0 \\ 2x &= -3 \\ x &= \frac{-3}{2} \end{aligned}$$

Les solutions de l'équation sont $S=\left\{\frac{-9}{4};\frac{-3}{2};1\right\}$

2) Résolution de l'équation $5x^3=2x^2$:

$$\begin{aligned} 5x^3 &= 2x^2 \\ 5x^3-2x^2 &= 0 \\ x^2\left(5x-2\right) &= 0 \end{aligned}$$

Un produit de facteurs est nul si au moins l'un d'eux est nul. On a alors :

$$\begin{aligned} \text{Soit } x^2 &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \text{soit } 5x-2 &= 0 \\ 5x &= 2 \\ x &= \frac{2}{5} \end{aligned}$$

Les solutions de l'équation sont $S = \left\{0; \frac{2}{5}\right\}$

3) Résolution de l'équation $(7x-5)^2 = (2x+1)^2$:

$$\begin{aligned}
(7x-5)^2 &= (2x+1)^2 \\
(7x-5)^2 - (2x+1)^2 &= 0 \\
[7x-5-(2x+1)]\,(7x-5+2x+1) &= 0 \\
(7x-5-2x-1)\,(9x-4) &= 0 \\
(5x-6)\,(9x-4) &= 0
\end{aligned}$$

Un produit de facteurs est nul si au moins l'un d'eux est nul. On a alors :

Soit $5x-6=0$	soit $9x-4=0$
$5x=6$	$9x=4$
$x=\frac{6}{5}$	$x=\frac{4}{9}$

Les solutions de l'équation sont $S = \left\{\frac{6}{5}; \frac{4}{9}\right\}$

4) Résolution de l'équation $10\,(x+7)\,(x-5) = 3x\,(x+7)$:

$$\begin{aligned}
10\,(x+7)\,(x-5) &= 3x\,(x+7) \\
10\,(x+7)\,(x-5) - 3x\,(x+7) &= 0 \\
(x+7)\,[10\,(x-5)-3x] &= 0 \\
(x+7)\,(10x-50-3x) &= 0 \\
(x+7)\,(7x-50) &= 0
\end{aligned}$$

Un produit de facteurs est nul si au moins l'un d'eux est nul. On a alors :

Soit $x+7=0$	soit $7x-50=0$
$x=-7$	$7x=50$
	$x=\frac{50}{7}$

Les solutions de l'équation sont $S = \left\{-7; \frac{50}{7}\right\}$

5) Résolution de l'équation $\frac{1}{(3-2x)^2} = \frac{4}{(x+1)^2}$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(3-2x)^2} &= \frac{4}{(x+1)^2} \\
(x+1)^2 &= 4(3-2x)^2 \\
(x+1)^2 - 4(3-2x)^2 &= 0 \\
[x+1-2(3-2x)][x+1+2(3-2x)] &= 0 \\
(x+1-6+4x)(x+1+6-4x) &= 0 \\
(5x-5)(-3x+7) &= 0 \\
5(x-1)(-3x+7) &= 0
\end{aligned}$$

Un produit de facteurs est nul si au moins l'un d'eux est nul. On a alors :

$$\begin{aligned}
\text{Soit } x-1 &= 0 \\
x &= 1
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\text{soit } -3x+7 &= 0 \\
-3x &= -7 \\
x &= \frac{7}{3}
\end{aligned}$$

Les solutions de l'équation sont $S = \left\{1; \frac{7}{3}\right\}$

6) Résolution de l'équation $\frac{1}{(3x+16)^2} = \frac{16}{(x+3)^2}$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(3x+16)^2} &= \frac{16}{(x+3)^2} \\
(x+3)^2 &= 16(3x+16)^2 \\
(x+3)^2 - 16(3x+16)^2 &= 0 \\
[x+3-4(3x+16)][x+3+4(3x+16)] &= 0 \\
(x+3-12x-64)(x+3+12x+64) &= 0 \\
(-11x-61)(13x+67) &= 0 \\
-(11x+61)(13x+67) &= 0
\end{aligned}$$

Un produit de facteurs est nul si au moins l'un d'eux est nul. On a alors :

$$\begin{aligned}
\text{Soit } 11x+61 &= 0 \\
11x &= -61 \\
x &= \frac{-61}{11}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\text{soit } 13x+67 &= 0 \\
13x &= -67 \\
x &= \frac{-67}{13}
\end{aligned}$$

Les solutions de l'équation sont $S = \left\{\frac{-61}{11}; \frac{-67}{13}\right\}$

Exercice 5

Question : L'équation $5x+1+2a=x-16a$ devient :

$$\begin{aligned} 5x+1+2a &= x-16a \\ 5x+1+2a-x+16a &= 0 \\ 4x+18a+1 &= 0 \\ 18a &= -4x-1 \\ a &= \frac{-4x-1}{18} \\ &= \frac{-4\times 3-1}{18} \\ &= \frac{-13}{18} \end{aligned}$$

Le nombre réel a est $a=\dfrac{-13}{18}$.

Exercice 6

ABC est un triangle quelconque et H est le projeté orthogonal du point A sur la droite (BC).
On pose $a=BC$, $b=AC$ et $h=AH$.

Question 1a : L'aire du triangle ABC en prenant la base $[BC]$ est $A_{ABC}=\dfrac{BC\times AH}{2}$ soit finalement $A_{ABC}=\dfrac{ah}{2}$.

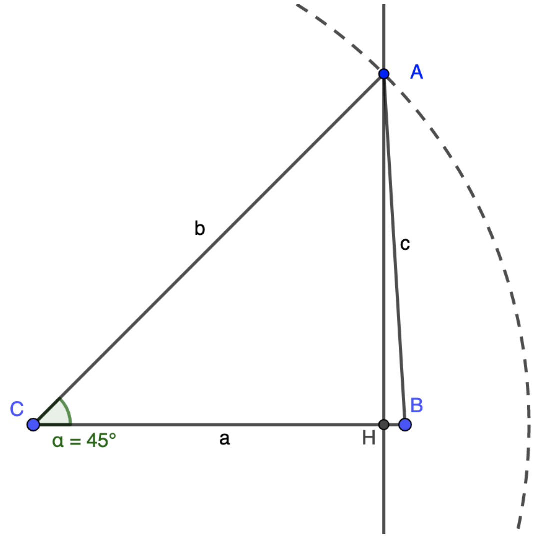
Question 1b : Comme H est le projeté orthogonal de A sur la droite (BC) alors le triangle AHC est rectangle en H. On peut donc utiliser la formule de trigonométrie avec le sinus :

$$\begin{aligned} \sin\left(\widehat{C}\right) &= \frac{AH}{AC} \\ &= \frac{h}{b} \end{aligned}$$

Question 1c : Comme $\sin\left(\widehat{C}\right)=\dfrac{h}{b}$ alors $h=b\sin\left(\widehat{C}\right)$.

Enfin, comme $A_{ABC}=\dfrac{ah}{2}$ alors $A_{ABC}=\dfrac{ab\sin\left(\widehat{C}\right)}{2}$.

Question 2a : Avec $a = 6$ cm , $b = 8$ cm et $\widehat{C} = 45^\circ$, le tracé du triangle donne :



Question 2b : Avec les données, l'aire se calcule par :

$$\begin{aligned} A_{ABC} &= \frac{ab\sin\left(\widehat{C}\right)}{2} \\ &= \frac{6\times 8\sin(45)}{2} \\ &= \frac{6\times 8\sqrt{2}}{4} \\ &= 12\sqrt{2} \\ &\simeq 16,97 \end{aligned}$$

L'aire du triangle est d'environ 16,97 cm^2.