Correction du D.S.T. n°1 du lundi 16 novembre 2020

Exercice 1 *(5,5 points)*

Question : La transformation des expressions littérales par développement donne :

$$\begin{aligned} A &= 3(2x-1)(1-x) \\ &= 3\left(2x-2x^2-1+x\right) \\ &= 3\left(-2x^2+3x-1\right) \\ &= -6x^2+9x-3 \text{ \textit{(1,5 pt)}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= (3-2x)^2 \\ B &= 4x^2-12x+9 \text{ \textit{(1 pt)}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= (1-7x)(1+7x) \\ &= -49x^2+1 \text{ \textit{(1 pt)}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= x\left(2x+\sqrt{5}\right)^2 \\ &= x\left(4x^2+4x\sqrt{5}+5\right) \\ &= 4x^3+4x^2\sqrt{5}+5x \text{ \textit{(2 pts)}} \end{aligned}$$

Exercice 2 *(5 points)*

Question : La transformation des expressions littérales par factorisation donne :

$$\begin{aligned} G &= (2x+1)(x+3)+5(2x+1) \\ &= (2x+1)(x+3+5) \\ &= (2x+1)(x+8) \text{ \textit{(1 pt)}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H &= 9x^2-12x+4 \\ &= (3x-2)^2 \text{ \textit{(1 pt)}} \end{aligned}$$

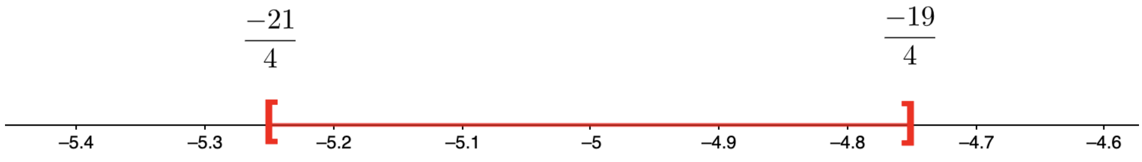
$$\begin{aligned} K &= (5x-2)^2-(x+3)^2 \\ &= [5x-2-(x+3)](5x-2+x+3) \\ &= (5x-2-x-3)(6x+1) \\ &= (4x-5)(6x+1) \text{ \textit{(2 pts)}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L &= 14x^3y-21xy^2+14xy \\ &= 7xy\left(2x^2-3y+2\right) \text{ \textit{(1 pt)}} \end{aligned}$$

Exercice 3 *(3 points)*

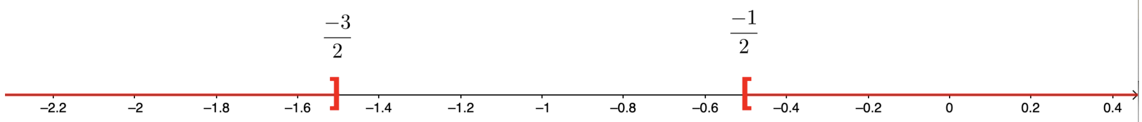
Question : Les solutions de ces inéquations sous représentation graphique donnent :

Pour l'inéquation $|x+5| \leqslant \frac{1}{4}$, on obtient $x \in \left[\frac{-21}{4};\frac{-19}{4}\right]$ et la représentation graphique donne :



(1 pt)

Pour l'inéquation $|x+1| \geqslant \frac{1}{2}$, on obtient $x \in \left]-\infty;\frac{-3}{2}\right] \cup \left[\frac{-1}{2};=\infty\right[$ et la représentation graphique



donne :

(1 pt)

Pour l'inéquation $|x-7,1| < 2$, on obtient $x \in]5,1;9,1[$ et la représentation graphique donne :

(1 pt)

Exercice 4 *(7,5 points)*

Question 1 :

$a \in \mathbb{D}$	$b \notin \mathbb{D}$	$a \in \mathbb{Q}$	$d \in \mathbb{R}$	$c \notin \mathbb{D}$
(0,25 pt)	*(0,25 pt)*	*(0,25 pt)*	*(0,25 pt)*	*(0,25 pt)*

Question 2 : Donner la forme irréductible des nombres a et c donne :

$$\begin{aligned} a &= \frac{-91}{35} \\ &= \frac{-13\times 7}{7\times 5} \\ &= \frac{-13}{5} \text{ (1 pt)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c &= \frac{48}{72} \\ &= \frac{6\times 8}{9\times 8} \\ &= \frac{6}{9} \\ &= \frac{2}{3} \text{ (1 pt)} \end{aligned}$$

Question 3 : L'écriture de d donne :

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{48} \\ &= \sqrt{6\times 8} \\ &= \sqrt{2\times 3\times 2\times 4} \\ &= \sqrt{3\times 2\times 2\times 4} \\ &= \sqrt{3\times 4\times 4} \\ &= 4\sqrt{3} \text{ (1 pt)} \end{aligned}$$

Question 4 : Le calcul donne :

$$\begin{aligned} \frac{b}{c} &= \frac{\frac{4}{3}}{\frac{48}{72}} \\ &= \frac{4}{3}\times\frac{72}{48} \\ &= \frac{4}{3}\times\frac{3^2\times 2\times 4}{3\times 4^2} \\ &= \frac{\cancel{4}}{\cancel{3}}\times\frac{\cancel{3^2}\times 2\times \cancel{4}}{\cancel{3}\times \cancel{4^2}} \\ &= 2 \text{ (1,5 pt)} \end{aligned}$$

Question 5 : L'écriture de $b-e$ donne :

$$\begin{aligned} b-e &= \frac{4}{3}-\frac{-2}{x+1} \\ &= \frac{4\,(x+1)}{3\,(x+1)}-\frac{-2\times 3}{3\,(x+1)} \\ &= \frac{4x+4+6}{3\,(x+1)} \\ &= \frac{4x+10}{3\,(x+1)} \; \textit{(1,75 pt)} \end{aligned}$$

Exercice 5 *(5,5 points)*

Question 1 : Dans $\mathbb{R}$ l'équation $A=0$ se résout de la façon suivante :

$$\begin{aligned} A &= 0 \\ 2x+3 &= 0 \\ 2x &= -3 \\ x &= \frac{-3}{2} \end{aligned}$$

La solution de l'équation $A=0$ est $x=\dfrac{-3}{2}$. *(1 pt)*

Question 2 : Dans $\mathbb{R}$ l'équation $AB=0$ se résout de la façon suivante :

$$\begin{aligned} AB &= 0 \\ (2x+3)\,(x-1) &= 0 \end{aligned}$$

Comme un produit de facteur est nul si au moins l'un des deux est nul, l'équation $AB=0$ revient à résoudre indépendamment les deux équations :

$$\begin{aligned} 2x+3 &= 0 \\ 2x &= -3 \\ x &= \frac{-3}{2} \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} x-1 &= 0 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Les solutions de l'équation $AB=0$ sont $x=\dfrac{-3}{2}$ et $x=1$. *(1,5 pt)*

Question 3 : Dans $\mathbb{R}$ l'équation $\dfrac{C}{B}=\dfrac{A}{2C}$ se résout de la façon suivante :

$$\frac{C}{B}=\frac{A}{2C}$$
$$\frac{x}{x-1}=\frac{2x+3}{2x}$$

La recherche des valeurs interdites nous impose de résoudre l'équation $2x=0$ et l'équation $x-1=0$. Les solutions sont $x=0$ et $x=1$. Les valeurs interdites sont donc $x=0$ et $x=1$. La suite de la résolution de l'équation donne :

$$\begin{aligned}
\frac{x}{x-1} &= \frac{2x+3}{2x} \\
\frac{x}{x-1}-\frac{2x+3}{2x} &= 0 \\
\frac{x(2x)}{2x(x-1)}-\frac{(2x+3)(x-1)}{2x(x-1)} &= 0 \\
\frac{2x^2-\left(2x^2-2x+3x-3\right)}{2x(x-1)} &= 0 \\
\frac{2x^2-2x^2-x+3}{2x(x-1)} &= 0 \\
\frac{-x+3}{2x(x-1)} &= 0 \text{ \textit{(2 pts)}}
\end{aligned}$$

Comme un quotient de facteurs est nul si le numérateur est nul et si le dénominateur est différent de 0, alors on a :

$$\begin{aligned}
-x+3 &= 0 \\
x &= 3 \text{ \textit{(0,5 pt)}}
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
2x(x-1) &\neq 0 \\
x &\neq 0 \\
\text{ou } x &\neq 1 \text{ \textit{(0,5 pt)}}
\end{aligned}$$

La solution de l'équation est $x=3$ et les nombres $x=0$ et $x=1$ sont les valeurs interdites.

Exercice 6 *(5,5 points)*

Question : La simplification des expressions sous la forme $a+b\sqrt{7}$ où $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$ donne :

$$\begin{aligned} A &= \left(1-2\sqrt{7}\right)^2 \\ &= 1-2\times 2\sqrt{7}+\left(2\sqrt{7}\right)^2 \\ &= 1-4\sqrt{7}+4\times 7 \\ &= 1-4\sqrt{7}+28 \\ &= 29-4\sqrt{7} \text{ (1 pt)} \end{aligned}$$

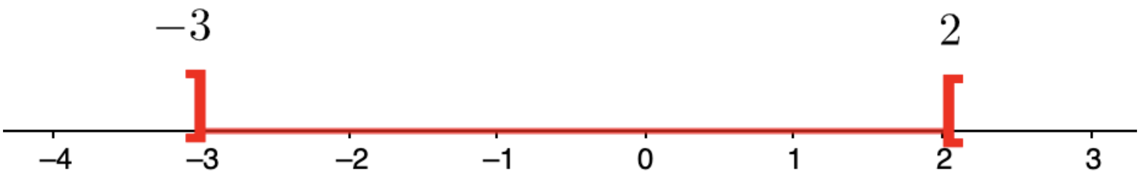
$$\begin{aligned} B &= \left(7+\sqrt{7}\right)\left(7-\sqrt{7}\right) \\ &= 7^2-\left(\sqrt{7}\right)^2 \\ &= 49-7 \\ &= 42+0\sqrt{7} \text{ (1 pt)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= \sqrt{7}\left(3+\sqrt{7}\right)^2 \\ &= \sqrt{7}\left[3^2+2\times 3\sqrt{7}+\left(\sqrt{7}\right)^2\right] \\ &= \sqrt{7}\left(9+6\sqrt{7}+7\right) \\ &= \sqrt{7}\left(16+6\sqrt{7}\right) \\ &= 16\sqrt{7}+6\left(\sqrt{7}\right)^2 \\ &= 16\sqrt{7}+6\times 7 \\ &= 42+16\sqrt{7} \text{ (1,5 pt)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= \left(\sqrt{7}+5\right)^2-\left(\sqrt{7}-5\right)^2 \\ &= \left(\sqrt{7}\right)^2+2\times 5\times\sqrt{7}+5^2-\left[\left(\sqrt{7}\right)^2-2\times 5\times\sqrt{7}+5^2\right] \\ &= 7+10\sqrt{7}+25-7+10\sqrt{7}-25 \\ &= 0+20\sqrt{7} \text{ (2 pts)} \end{aligned}$$

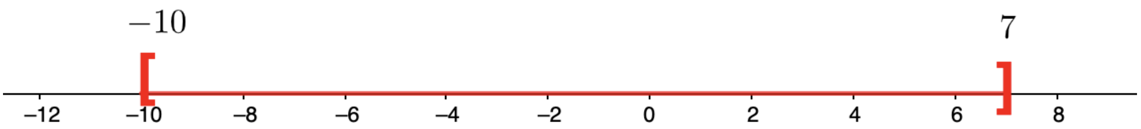
Exercice 7 *(2 points)*

Question 1 :
Pour $I \cap J$, on obtient $I \cap J = [-3;2]$ et la représentation graphique donne :



(0,5 pt)

Pour $I\cup$, on obtient $I \cup J = [-10;7]$ et la représentation graphique donne :



(0,5 pt)

Question 2 : $U \cap V =]0;5[$ *(0,5 pt)* et $U \cup V =]-\infty;+\infty[$ *(0,5 pt)*.

Exercice 8 *(6 points)*

Question 1 : Le cercle C_1 étant inscrit au carré $ABCD$, on a $R_1 = \frac{1}{2}AB$. Comme $AB = 230,381$ alors $R_1 = 115,1905$ m. *(0,5 pt)*
Le cercle C_2 étant circonscrit au carré $ABCD$, on a $R_2 = \frac{1}{2}AC$. Les segments $[AB]$ et $[BC]$ étant perpendiculaires, le triangle ABC est rectangle en B. On peut donc utiliser le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned}AC^2 &= AB^2 + BC^2\\ AC &= \sqrt{AB^2+BC^2}\\ &= \sqrt{2AB^2}\\ &= AB\sqrt{2}\end{aligned}$$

Comme $R_2 = \frac{1}{2}AC$ alors $R_2 = \frac{AB\sqrt{2}}{2}$.
Comme $AB = 230,381$ alors $R_2 = \frac{230,381\times\sqrt{2}}{2}$ soit environ 162,9 m. *(2,5 pts)*

Question 2 : Comme $R_1 = 115,1905$ alors il peut s'écrire $R_1 = \frac{1151905}{10^4}$. R_1 s'écrit bien sous la forme $\frac{a}{10^p}$ avec a un nombre entier relatif et p une puissance entière. Par conséquent, R_1 est bien un nombre décimal. *(0,5 pt)*
Comme $R_2 = \frac{230,381\times\sqrt{2}}{2}$, il peut s'écrire $R_2 = \frac{230,381}{2}\times\sqrt{2}$. Comme $\sqrt{2}$ est un nombre réel, alors R_2 est un nombre réel. *(0,5 pt)*

Question 3 : Si P_1 et P_2 sont les périmètres respectifs des cercles C_1 et C_2 alors on a $P_1 = 2\pi R_1$ et $P_2 = 2\pi R_2$.
Comme $D = P_2 - P_1$ alors on a :

$$\begin{aligned}D &= P_2 - P_1\\ &= 2\pi R_2 - 2\pi R_1\\ &= 2\pi\left(R_2 - R_1\right)\end{aligned}$$

La forme factorisée de D en fonction de R_1 et de R_2 est $D = 2\pi\left(R_2 - R_1\right)$ *(1 pt)*

Question 4 : Avec $R_1 = 115,1905$ et $R_2 \simeq 162,9$, on a $D = 2\pi\left(162,9 - 115,1905\right)$ soit $D \simeq 299,7927$ m. La valeur de la différence des deux périmètres semble être très proche de la valeur de la vitesse de la lumière, à 10^3 près. Il est cependant difficile d'affirmer si les bâtisseurs egyptiens maitrisaient cette connaissance en -2500 ans ou bien s'il s'agit d'une coincidence. *(1 pt)*