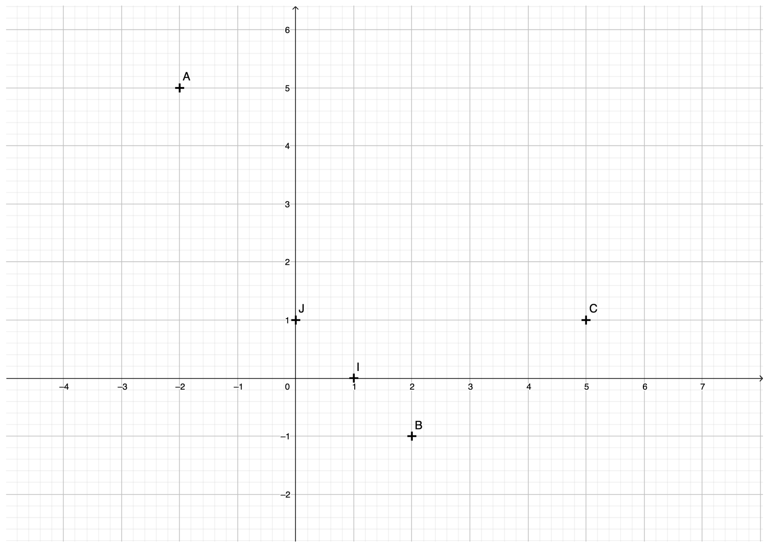
Correction de l'évaluation de mathématiques n°15 du lundi 31 mai 2021

Exercice 1

Question 1 : La figure comprenant le repère et les trois points donne :



Question 2 : Pour montrer que le triangle ABC est rectangle, on utilise la réciproque du théorème de Pythagore. Pour cela, il nous faut calculer les longueurs AB, AC et BC :

Comme $A\left(-2;5\right)$ et $B\left(2;-1\right)$ alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2-(-2)\\-1-5\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\-6\end{pmatrix}$.

Comme $A\left(-2;5\right)$ et $C\left(5;1\right)$ alors $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}5-(-2)\\1-5\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}7\\-4\end{pmatrix}$.

Comme $B\left(2;-1\right)$ et $C\left(5;1\right)$ alors $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}5-2\\1-(-1)\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$.

Le calcul des longueurs devient donc pour chacun :

$$\begin{aligned}AB &= \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \\ &= \sqrt{4^2+(-6)^2} \\ &= \sqrt{16+36} \\ &= \sqrt{52}\end{aligned} \qquad \begin{aligned}AC &= \left\|\overrightarrow{AC}\right\| \\ &= \sqrt{7^2+(-4)^2} \\ &= \sqrt{49+16} \\ &= \sqrt{65}\end{aligned} \qquad \begin{aligned}BC &= \left\|\overrightarrow{BC}\right\| \\ &= \sqrt{3^2+2^2} \\ &= \sqrt{9+4} \\ &= \sqrt{13}\end{aligned}$$

On a d'une part $\begin{aligned}AB^2+BC^2 &= \left(\sqrt{52}\right)^2+\left(\sqrt{13}\right)^2 \\ &= 52+13 \\ &= 65\end{aligned}$ et d'autre part $\begin{aligned}AC^2 &= \left(\sqrt{65}\right)^2 \\ &= 65\end{aligned}$

On remarque que $AB^2+BC^2=AC^2$, on en déduit d'après la réciproque du théorème de Pythagore que le triangle ABC est rectangle.

Question 3 : Posons $D\left(x;y\right)$ les coordonnées du point D. Pour que le quadrilatère $ABCD$ soit un rectangle sachant que $ABCD$ est un triangle rectangle, il faut arriver à l'égalité $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
Comme $D\left(x;y\right)$ et $C\left(5;1\right)$ alors $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}5-x\\1-y\end{pmatrix}$.
Par identification, on a alors : $\left\{\begin{array}{ll}5-x & =4\\1-y & =-6\end{array}\right.$ D'où : $\left\{\begin{array}{ll}x & =1\\y & =7\end{array}\right.$ Les coordonnées du point D sont $D\left(1;7\right)$.

Exercice 2

Question : D'après l'énoncé, le point G est le point d'intersection entre $\left(d\right)$ et $\left[EF\right]$. Il est donc le milieu du segment $\left[EF\right]$. Or, les coordonnées du milieu du ce segment s'obtiennent par :

$$G\left(\frac{x_E+x_F}{2};\frac{y_E+y_F}{2}\right)$$
$$G\left(\frac{3+0}{2};\frac{-2+3}{2}\right)$$
$$G\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$$

Les coordonnées de G sont $G\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$.

Exercice 3

Question : Posons $P\left(x;2\right)$ les coordonnées du point P. Pour que les droites $\left(HP\right)$ et $\left(KL\right)$ soient parallèles, il faut que les vecteurs $\overrightarrow{HP}$ et $\overrightarrow{KL}$ soient colinéaires. Pour cela, leur déterminant doit être nul.
Avant cela, il nous faut déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{HP}$:
Comme $H\left(-4;3\right)$ et $P\left(x;2\right)$ alors $\overrightarrow{HP}\begin{pmatrix}x-\left(-4\right)\\2-\left(-3\right)\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{HP}\begin{pmatrix}x+4\\5\end{pmatrix}$.
Le déterminant étant nul, on a alors :

$$\begin{aligned}
\det\left(\overrightarrow{HP};\overrightarrow{KL}\right) &= 0\\
\begin{vmatrix} x+4 & -2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} &= 0\\
3\left(x+4\right)-\left(-2\right)\times 5 &= 0\\
3x+12+10 &= 0\\
3x &= -22\\
x &= \frac{-22}{3}
\end{aligned}$$

L'abscisse du point P est $\dfrac{-22}{3}$.

Exercice 3

Question : pour savoir si les points Q, R et S sont-ils alignés, on vérifie sur les vecteurs $\overrightarrow{QR}$ et $\overrightarrow{QS}$ sont colinéaires. Pour cela, il faut calculer leur déterminant via leurs coordonnées :
Comme $Q\left(-2;6\right)$ et $R\left(2;1\right)$ alors $\overrightarrow{QR}\begin{pmatrix} 2-(-2) \\ 1-6 \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{QR}\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$.
Comme $Q\left(-2;6\right)$ et $S\left(6;-3\right)$ alors $\overrightarrow{QS}\begin{pmatrix} 6-(-2) \\ -3-6 \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{QS}\begin{pmatrix} 8 \\ -9 \end{pmatrix}$.
Le calcul de leur déterminant donne :

$$\begin{aligned}
\det\left(\overrightarrow{QR};\overrightarrow{QP}\right) &= \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ -5 & -9 \end{vmatrix}\\
&= 4\times(-9)-(-5)\times 8\\
&= -36+40\\
&= 4\\
x &= \frac{-22}{3}
\end{aligned}$$

Comme $\det\left(\overrightarrow{QR};\overrightarrow{QP}\right) \neq 0$, les deux vecteurs ne sont pas colinéaires : les points Q, R et S ne sont pas alignés.