Correction de l'évaluation de mathématiques n°10 du mercredi 17 février 2021

Exercice 1

Question 1 : L'expression $f(x)$ développée donne :

$$\begin{aligned} f(x) &= 4(x-5)^2-9 \\ &= 4\left(x^2-10x+25\right)-9 \\ &= 4x^2-40x+100-9 \\ &= 4x^2-40x+91 \end{aligned}$$

L'expression développée de $f(x)$ est $f(x)=4x^2-40x+91$.

Question 2 : L'expression de $f(x)$ donne :

$$\begin{aligned} f(x) &= 4(x-5)^2-9 \\ &= 2^2(x-5)^2-3^2 \\ &= [2(x-5)-3][2(x-5)+3] \\ &= (2x-10-3)(2x-10+3) \\ &= (2x-13)(2x-7) \end{aligned}$$

L'expression factorisée de $f(x)$ est $f(x)=(2x-13)(2x-7)$.

Question 3 :
Situation a : La résolution de l'équation donne :

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ (2x-13)(2x-7) &= 0 \end{aligned}$$

Un produit de facteurs est nul si au moins l'un des deux facteurs est nul.

$$\begin{aligned} \text{On a d'une part } 2x-13 &= 0 \\ 2x &= 13 \\ x &= \frac{13}{2} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \text{et d'autre part } 2x-7 &= 0 \\ 2x &= 7 \\ x &= \frac{7}{2} \end{aligned}$$

Les solutions de l'équation sont $S=\left\{\frac{13}{2};\frac{7}{2}\right\}$.

Situation b : Les coordonnées du ou des points d'intersection de (C_f) avec l'axe des ordonnées revient à obtenir les ordonnées des points de la courbe pour $x=0$. Cela donne :

$$\begin{aligned} f(x) &= 4x^2-40x+91 \\ &= 4\times0^2-40\times0+91 \\ &= 91 \end{aligned}$$

Les coordonnées de l'unique point sont $(0;91)$.

<u>Situation c :</u> Déterminer le ou les antécédents de -9 par f revient à résoudre l'équation $f(x) = -9$:

$$\begin{aligned} f(x) &= -9 \\ 4(x-5)^2 - 9 &= -9 \\ 4(x-5)^2 &= 0 \\ (x-5)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Un produit de facteurs est nul si au moins l'un des deux facteurs est nul. On a deux fois l'équation $x - 5 = 0$ à résoudre, ce qui donne $x = 5$.
L'antécédent de -9 est 5.

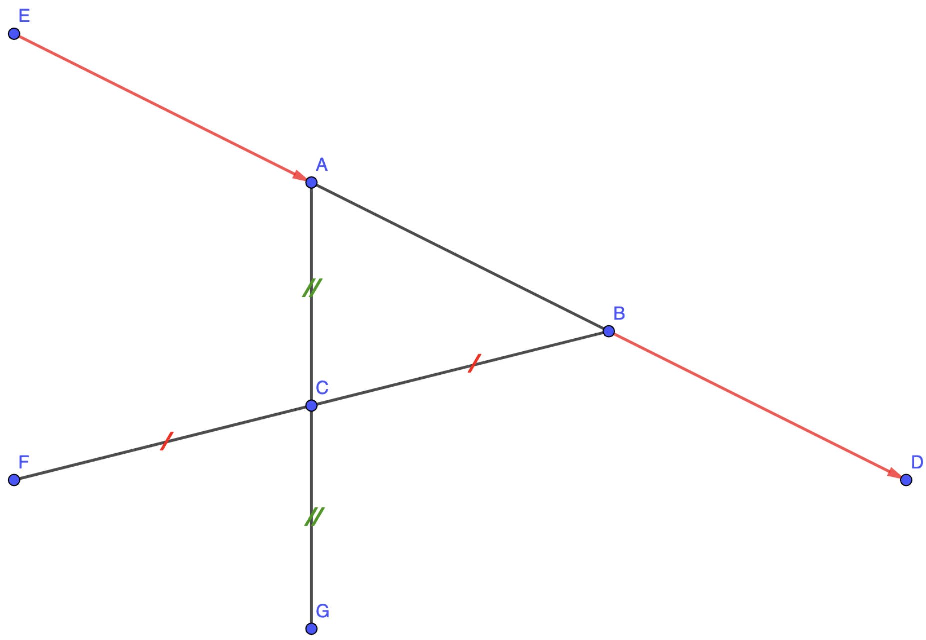
<u>Situation d :</u> Le calcul de l'image de $\sqrt{2}$ par f donne :

$$\begin{aligned} f(x) &= 4x^2 - 40x + 91 \\ f\left(\sqrt{2}\right) &= 4\left(\sqrt{2}\right)^2 - 40\sqrt{2} + 91 \\ &= 4 \times 2 - 40\sqrt{2} + 91 \\ &= -40\sqrt{2} + 99 \end{aligned}$$

On obtient $f\left(\sqrt{2}\right) = -40\sqrt{2} + 99$.

Exercice 2

Question 1 : La figure donne :



Question 2 : A l'aide de la propriété de Chasles, on peut écrire que :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AG} &= 2\overrightarrow{AC} \text{ car } C \text{ est le milieu de } [AG] \\
&= 2\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right) \text{ avec la relation de Chasles} \\
&= 2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC} \\
&= \overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BF} \\
&= \overrightarrow{EF} \text{ avec la relation de Chasles}
\end{aligned}$$

On a bien $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{EF}$. A partir de cette égalité de vecteurs, on peut en déduire que les droites (AG) et (EF) sont parallèles.

Question 3 : Comme les segments $[AG]$ et $[FB]$ se coupent en leurs milieux, alors le quadrilatère $ABGF$ est un parallélogramme.
On peut alors écrire que $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{FG}$. Or, on sait que $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BD}$. On en conclue que $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{FG}$. A partir de cette dernière égalité, on peut dire que le quadrilatère $FBDG$ est un parallélogramme. On peut conclure que les droites (BF) et (DG) sont parallèles.

Exercice 3

Question 1 : D'après le tableau de variations de f, son ensemble de définition D est $D=[0;5]$.

Question 2 :

$f(1)<f\left(\frac{3}{2}\right)$
Affirmation fausse
La fonction est décroissante donc pour $1<\frac{3}{2}$, on devrait avoir $(1)>f\left(\frac{3}{2}\right)$

$f(2,3)<f(3,2)$
Affirmation vraie
La fonction est croissante donc pour $2,3<3,2$, on a bien $(2,3)<f(3,2)$

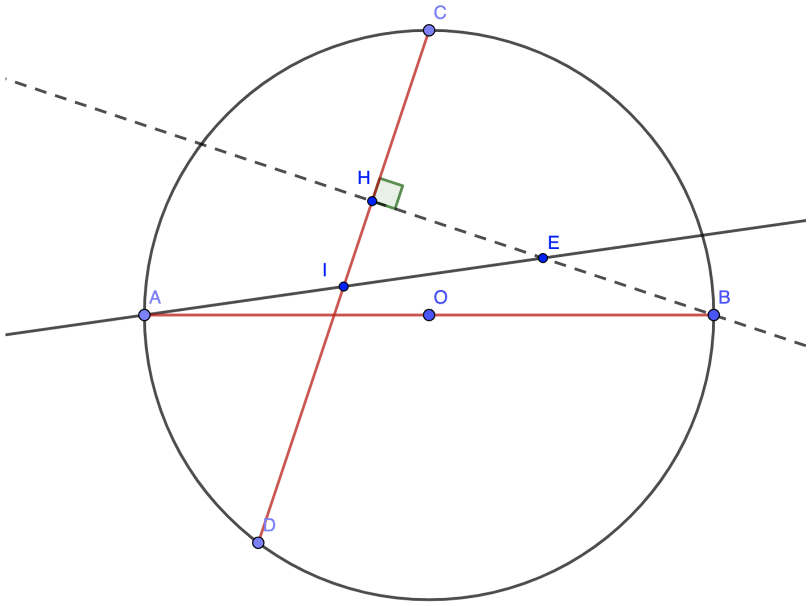
$f(4)>f(4,5)$
Affirmation vraie
La fonction est décroissante d
pour $4<4,5$, on a bien avoir (4
$f(4,5)$

Question 3 : D'après le tableau de variations, les encadrements deviennent :

$a)f(x)\in[-5;1]$ $\quad b)f(x)\in[-5;1]$ $\quad c)f(x)\in[-2;1]]$

Exercice 4

Question 1 : Avec le point H de la question 3 et le point E de la question 4, la figure donne :



Question 2 : Le point I est le milieu du segment $[CD]$, il se situe donc à égal distance des points C et D.
De plus, les points C et D sont sur ce même cercle. Les segments $[OC]$ et $[OD]$ sont donc des rayons et le point O est donc aussi à égal distance des points C et D. Par définition de la médiatrice, les points O et I étant à égale distance des points C et D, la droite (OI) est la médiatrice du segment $[CD]$.

Question 3 : Le placement du point H est donné sur la figure de départ.
D'après la question précédente, la droite (OI) est la médiatrice du segment $[CD]$. On peut donc dire que ces deux droites sont perpendiculaires.
Comme le point H est le projeté orthogonal du point B sur $[CD]$, alors on peut dire aussi que les droites (HB) et (CD) sont perpendiculaires.
Nous avons ainsi deux droites perpendiculaires à une même droite : elles sont donc parallèles. Les droites (HB) et (OI) sont parallèles.

Question 4 : Le placement du point E est donné sur la figure de départ.
On sait que les droites (OI) et (HB) et donc (HE) sont parallèles. Les droites (AE) et (AB) sont sécantes en A. On peut donc utiliser le théorème de Thalès :
$\frac{AO}{AB} = \frac{AI}{AE}$. Or, comme O est le milieu de $[AB]$, alors $\frac{AO}{AB} = \frac{1}{2}$ et par conséquent, $\frac{AI}{AE} = \frac{1}{2}$. On en déduit que I est le milieu de $[AE]$.

Question 5 : Les segments $[AE]$ et $[CD]$ se coupent au même milieu I. Par conséquent, le quadrilatère $ACED$ est un parallélogramme.

Exercice 5

Question 1 : L'abscisse du point A est $x=-1$. En calculant $f(-1)$, on obtient $f(-1)=-2(-1)^2+4\times(-1)+3$, ce qui donne $f(-1)=-2-4+3$ soit $f(-1)=-3$. Le point $A(-1;-3)$ appartient bien à (C_f).

Question 2 : Le point B d'abscisse 3 appartenant à la courbe (C_f), son ordonnée est $f(3)$. On a alors $f(3)=-2\times 3^2+4\times 3+3$, ce qui donne $f(3)=-18+12+3$ soit $f(3)=-3$. L'ordonnée du point B est -3.

Question 3 : Les points de (C_f) d'ordonnée 3 ont pour abscisse les solutions de l'équation $f(x)=3$:

$$\begin{aligned} f(x) &= 3 \\ -2x^2+4x+3 &= 3 \\ 2x(-x+2)+3-3 &= 0 \\ 2x(-x+2) &= 0 \end{aligned}$$

Un produit de facteurs est nul si au moins l'un des deux facteurs est nul. Ce qui donne :

$$\begin{aligned} \text{On a d'une part } 2x &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \text{et d'autre part } -x+2 &= 0 \\ -x &= -2 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Les solutions de l'équation sont $S=\{0;2\}$. Les points ont pour coordonnées $(0;3)$ et $(2;3)$.

Question 4 : L'expression de $f(x)-f(1)$ donne, avec la factorisation :

$$\begin{aligned} f(x)-f(1) &= -2x^2+4x+3-\left(-2\times 1^2+4\times 1+3\right) \\ &= -2x^2+4x+3-(-2+4+3) \\ &= -2x^2+4x+3-5 \\ &= -2x^2+4x-2 \\ &= -2\left(x^2-2x+1\right) \\ &= -2(x-1)^2 \end{aligned}$$

Question 5 : Pour tout x réels, $(x-2)^2>0$ donc $-2(x-1)^2<0$, d'où $f(x)-f(1)<0$. On en déduit que la fonction f admet un maximum $M=5$.

Exercice 6

Question 1 : La figure donne :

Question 2 : D'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CE} &= \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} \\ &= \overrightarrow{CD} + 2\overrightarrow{AD} \text{ car } \overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AD}\end{aligned}$$

On a bien $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CD} + 2\overrightarrow{AD}$.

Question 3 : D'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} \\ &= \frac{3}{2}\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CD} \text{ car } \overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{DC} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AD}\end{aligned}$$

On a finalement $\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AD}$.

Question 4 : Comme $\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AD}$ alors en multipliant par 2, on obtient $2\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CD} + 2\overrightarrow{AD}$. Or, comme $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CD} + 2\overrightarrow{AD}$, alors on peut écrire que $2\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CE}$. On a alors une colinéarité des deux vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CE}$: les points B, C et E sont alignés.

Exercice 7

Question : La résolution des deux équations donne :

$$\begin{aligned}(1+4x)^2+(5x-2)(1+4x)&=0\\(1+4x)\left[(1+4x)+(5x-2)\right]&=0\\(1+4x)\left[(1+4x+5x-2)\right)&=0\\(1+4x)\left[(9x-1)\right)&=0\end{aligned}$$

Un produit de facteurs est nul si au moins l'un des deux facteurs est nul :

On a d'une part $1+4x=0$ et d'autre part $9x-1=0$

$4x=-1$; $9x=1$

$x\dfrac{-1}{4}$; $x=\dfrac{1}{9}$

Les solutions de l'équation sont $S=\left\{\dfrac{-1}{4};\dfrac{1}{9}\right\}$.

$$\begin{aligned}(9x+1)^2-(x+5)^2&=0\\(9x+1+x+5)\left[9x+1-(x+5)\right]&=0\\(10x+6)(9x+1-x-5)&=0\\(10x+6)(8x-4)&=0\\2(5x+3)(8x-4)&=0\\8(5x+3)(2x-1)&=0\end{aligned}$$

Un produit de facteurs est nul si au moins l'un des deux facteurs est nul :

On a d'une part $5x+3=0$ et d'autre part $2x-1=0$

$5x=-3$; $2x=1$

$x\dfrac{-3}{5}$; $x=\dfrac{1}{2}$

Les solutions de l'équation sont $S=\left\{\dfrac{-3}{5};\dfrac{1}{2}\right\}$.